THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jacques RUTMAN

SUJET DE LA THESE : Bruits dans les oscillateurs. Application à la métrologie des fréquences et à la spectroscopie hertzienne.

Soutenue le 14 mars 1972 devant la Commission d'examen

MM.	J. UEBERSFELD	Président
	P. GRIVET	Examinateurs
	J. DE PRINS	
	J. TAILLET	Invités
	R. MOREAU	
	J. LE MÉZEC	

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON

1972

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jacques RUTMAN

SUJET DE LA THESE : Bruits dans les oscillateurs. Application à la métrologie des fréquences et à la spectroscopie hertzienne.

Soutenue le 14 mars 1972 devant la Commission d'examen

MM.	J. UEBERSFELD	Président
	P. GRIVET	Examinateurs
	J. DE PRINS	
	J. TAILLET	Invités
	R. MOREAU	
	J. LE MÉZEC	

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON
1972

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur le Professeur R. Castaing, *Directeur Général de l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, de m'avoir autorisé à préparer cette thèse à l'O.N.E.R.A.*

Toute ma reconnaissance va naturellement à Monsieur le Professeur J. Uebersfeld, *Professeur à l'Université de Paris VI, Sous-Directeur du Laboratoire de l'Horloge Atomique, qui, après m'avoir initié au domaine des étalons de fréquence, a su m'encourager, me diriger et me suggérer des domaines d'études variés tout au long de ce travail.*

Je voudrais remercier Monsieur le Professeur P. Grivet, *Directeur de l'Institut d'Electronique Fondamentale de la Faculté des Sciences d'Orsay, pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury.*

Je remercie tout particulièrement Monsieur le Professeur J. De Prins, *Professeur à l'Université Libre de Bruxelles, qui a bien voulu venir à Paris pour faire partie du Jury.*

Monsieur J. Taillet, *Directeur Scientifique de la Physique Générale à l'O.N.E.R.A., et Monsieur* R. Moreau, *Directeur Scientifique Adjoint, trouveront ici mes remerciements pour l'aide constante qu'ils ont bien voulu m'apporter au cours de mon travail.*

Monsieur J. Le Mézec, *Ingénieur en Chef des Télécommunications au C.N.E.T., trouvera ici mes remerciements pour avoir bien voulu s'intéresser à ce travail et faire partie du Jury.*

Ma reconnaissance va aussi à Monsieur M. Chatanier, *dans le groupe duquel j'ai effectué mon stage, pour les conseils qu'il a bien voulu me prodiguer.*

Je remercie également les chercheurs du Laboratoire de l'Horloge Atomique de Besançon, et plus particulièrement Messieurs Olivier, Groslambert, Décailliot *et* Hardin, *pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues au cours de mes séjours à Besançon.*

Je remercie enfin la Direction de la Société ADRET Electronique en la personne de son Directeur Technique, Monsieur R. Charbonnier, *pour les facilités qu'elle m'a données lors de la rédaction de ce travail.*

Je n'aurais garde d'oublier Madame Cavron *et Monsieur* Richard *pour la rapidité et la compétence avec lesquelles ils ont effectué respectivement la frappe du manuscrit et la reproduction des figures.*

*

SUR LES GÉNÉRATEURS DE FRÉQUENCE DE TRÈS HAUTES PERFORMANCES

par Jacques RUTMAN

RÉSUMÉ

Cette publication est consacrée à l'étude des aspects divers que présente le problème du bruit dans les générateurs de fréquence ultra-stables.

La première partie traite de la caractérisation d'un générateur perturbé par le bruit ; des relations générales entre l'instabilité de fréquence et la pureté spectrale sont établies.

Une analyse détaillée des effets du bruit thermique interne des oscillateurs, ainsi qu'un modèle aléatoire stationnaire du bruit de scintillation de fréquence, sont développés dans la deuxième partie.

La troisième partie est consacrée à l'instabilité de fréquence dans le domaine temps (précision des mesures de fréquence, estimations, montage expérimental).

Dans la quatrième partie, le générateur ultra-stable est considéré en tant qu'instrument scientifique. Les effets du bruit de fréquence sur la sensibilité de l'observation d'un phénomène spectroscopique sont étudiés.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Oscillateurs – Stabilisateurs fréquence – Stabilité – Fréquence – Bruit radio – Horloges atomiques – Spectres – Bruit – Scintillation.

ON EXTRA-HIGH PERFORMANCE FREQUENCY GENERATORS

SUMMARY

This publication is devoted to some aspects of the problem of noise in ultra-stable frequency generators.

In Part I is studied the characterization of a noise-perturbated generator ; the general relationships between frequency instability and spectral purity are demonstrated.

A detailed analysis of oscillator internal thermal noise, and a stationary random model for flicker frequency noise, are developed in Part II.

Part III is devoted to time-domain frequency instability (precision of frequency measurements, practical estimates, experimental set-up).

In part IV, the ultra-stable frequency generator is considered as a scientific instrument. The effects of frequency noise on the sensitivity of an E.P.R. spectrometer are studied.

Descriptors (NASA thesaurus) : Oscillators – Frequency standards – Frequency stability – Stable oscillations – Atomic clocks – Frequency control – White noise – Thermal noise – Noise spectra – Flicker.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
PRINCIPALES NOTATIONS	5
INTRODUCTION	6
Première Partie : CARACTÉRISATION DES GÉNÉRATEURS SINUSOÏDAUX	
Chapitre I - Générateurs de fréquence à hautes performances	7
I,1. LES OSCILLATEURS A QUARTZ	7
I,2. LES GÉNÉRATEURS DE FRÉQUENCE ATOMIQUES ET MOLÉCULAIRES	9
I,3. LES GÉNÉRATEURS ATOMIQUES PASSIFS :	9
I,3.1. Générateur à vapeur de rubidium	9
I,3.2. Générateur à jet de césium	11
I,4. LES GÉNÉRATEURS ATOMIQUES OU MOLÉCULAIRES ACTIFS :	11
I,4.1. Maser à ammoniac	12
I,4.2. Maser à hydrogène	12
I,5. ÉTALONS DE FRÉQUENCE PRIMAIRES ET SECONDAIRES	13
I,6. ÉTALONS DE FRÉQUENCE DANS LE DOMAINE OPTIQUE	13
Chapitre II - Représentations et paramètres caractéristiques d'un signal quasi-sinusoïdal	
II,1. REPRÉSENTATIONS MATHÉMATIQUES D'UN SIGNAL QUASI-SINUSOÏDAL	14
II,1.1. Modèles à sauts de fréquence, de phase et d'amplitude	14
II,1.2. Modèles à fluctuations aléatoires continues	15
II,1.2.1. Modèles à stationnarité de phase	15
II,1.2.2. Modèles à diffusion de phase	15
II,2. CARACTÉRISATIONS D'UN SIGNAL QUASI-SINUSOÏDAL	16
II,2.1. Instabilité de fréquence	16
II,2.1.1. Caractérisation dans le domaine temps	16
II,2.1.2. Caractérisation dans le domaine fréquence	17
II,2.1.3. Relations entre ces caractérisations	18
II,2.2. Pureté spectrale du signal	20
II,2.2.1. Spectre de radio-fréquences	20
II,2.2.2. Concept de pureté spectrale	20
Chapitre III - Relations générales entre instabilité de fréquence et pureté spectrale	
III,1. RELATION GÉNÉRALE ENTRE $S_v(f)$ et $I(\tau)$	22
III,1.1. Calcul de la relation	22
III,1.2. Exemple d'application	23
III,2. RELATION GÉNÉRALE ENTRE $S_v(f)$ et $S_\phi(f)$	24
III,2.1. Calcul de la relation	24
III,2.2. Propriétés du spectre de radio-fréquences	25
III,2.3. Etude de cas particuliers :	27
III,2.3.1. $S_\phi(f)$ courbe de Gauss	27
III,2.3.2. $S_\phi(f)$ blanc passe-bas	27
III,2.4. Approximation du faible indice de modulation	27
III,3. DÉMONSTRATION DIRECTE DE LA RELATION GÉNÉRALE ENTRE $S_v(f)$ et $S_\phi(f)$	28
III,3.1. Sans fluctuations d'amplitude	28
III,3.2. Avec fluctuations d'amplitude :	30
III,3.2.1. Calcul de la relation	30
III,3.2.2. Propriétés du spectre de radio-fréquences	31
III,3.3. Application du théorème de la limite centrale	32
III,4. RELATION ENTRE INSTABILITÉ DE FRÉQUENCE A TRÈS COURT TERME ET DISPERSION DU SPECTRE DE RADIO-FRÉQUENCES	32
III,5. CONCLUSIONS	33

Deuxième Partie : ÉTUDE DES BRUITS DANS LES OSCILLATEURS

Chapitre IV - Revue des sources de bruit dans les oscillateurs 35

IV,1. BRUIT THERMIQUE INTERNE ADDITIF (résultats classiques) 36
IV,2. BRUIT THERMIQUE EXTERNE ADDITIF 36
IV,3. BRUIT MULTIPLICATIF EN 1/f D'ORIGINE MACROSCOPIQUE 37
IV,4. BRUIT DANS LES GÉNÉRATEURS ATOMIQUES PASSIFS 37
IV,5. PERTURBATIONS SYSTÉMATIQUES 38
IV,6. CONCLUSION 38

Chapitre V - Théorie généralisée du bruit thermique interne additif 39

V,1. BRUIT THERMIQUE INTERNE ADDITIF 39
V,1.1. Filtrage du bruit par le résonateur de l'oscillateur 39
V,1.2. Instabilité dans le domaine fréquence 40
V,1.3. Instabilité dans le domaine temps : saturation de $I(\tau)$ 42
V,1.4. Spectre de radio-fréquences 43
V,1.4.1. Calcul du spectre 43
V,1.4.2. Propriétés du spectre : aire, largeur de raie 44
V,1.5. Analogie entre la diffusion de phase et la diffusion du mouvement brownien 46
V,1.5.1. Similitude des expressions approchées 46
V,1.5.2. Similitude des expressions générales 47
V,1.6. Analyse plus précise du filtrage du bruit par le résonateur de l'oscillateur 47
V,1.7. Application aux masers 48
V,2. BRUIT THERMIQUE EXTERNE ADDITIF 49
V,2.1. Instabilité dans le domaine fréquence 50
V,2.2. Instabilité dans le domaine temps : saturation de $I(\tau)$ 51
V,2.3. Spectre de radio-fréquences 52
V,3. IMPORTANCE RELATIVE DES BRUITS THERMIQUES INTERNE ET EXTERNE DANS UN OSCILLATEUR A QUARTZ 52
V,4. CONCLUSIONS 53

Chapitre VI - Un modèle aléatoire stationnaire de bruit de fréquence en 1/f 55

VI,1. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX CONCERNANT L'INSTABILITÉ DE FRÉQUENCE 55
VI,1.1. Domaine temps 55
VI,1.2. Domaine fréquence 55
VI,2. APPROCHES CLASSIQUES POUR L'ÉTUDE DU BRUIT DE FRÉQUENCE EN 1/f : 56
VI,2.1. Durée totale d'observation finie 56
VI,2.2. Modèle de spectre à fréquences de coupure abruptes 56
VI,3. NOUVELLE APPROCHE A L'AIDE D'UN MODÈLE STATIONNAIRE 56
VI,3.1. Structure générale du modèle à sauts de fréquence 57
VI,3.2. Premier cas : distribution de Poisson des instants de saut 58
VI,3.3. Second cas : distribution des instants de saut donnant les propriétés de bruit en 1/f 60
VI,3.3.1. Instabilité dans le domaine fréquence 60
VI,3.3.2. Instabilité dans le domaine temps : palier et loi logarithmique de $I(\tau)$ 61
VI,3.3.3. Durée moyenne entre deux sauts successifs 63
VI,4. CONCLUSIONS SUR CETTE APPROCHE 64

Troisième Partie : LE GÉNÉRATEUR SINUSOÏDAL EN TANT QU'ÉTALON DE FRÉQUENCE

Chapitre VII - Interprétation des paramètres $I(\tau)$ et $\tau I(\tau)$ 65

VII,1. DÉTERMINATION D'UNE FRÉQUENCE PENDANT UNE DURÉE TOTALE FINIE τ_o 65

VII,1.1. Interprétation de $I(\tau_o)$ lors d'une mesure de fréquence de durée τ_o 65

VII,1.2. Un critère de précision de la détermination d'une fréquence 66

VII,1.3. Deux utilisations possibles d'une durée totale de mesure τ_o : 67

VII,1.3.1. Une mesure unique de durée τ_o 67

VII,1.3.2. N mesures adjacentes de durée τ_1 ($N\tau_1 = \tau_o$) 67

VII,1.3.3. Comparaison de la précision des deux méthodes 70

VII,2. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DES PASSAGES A ZÉRO D'UN SIGNAL QUASI-SINUSOÏDAL ; INTERPRÉTATION DE $\tau . I(\tau)$ 70

Chapitre VIII - Estimation de $I(\tau)$ à partir d'échantillons de taille N 72

VIII,1. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR L'ESTIMATION DE $I(\tau)$ 72

VIII,2. VARIANCE D'UN ÉCHANTILLON DE TAILLE N : $\sigma^2[N, T, \tau]$ 73

VIII,3. CALCUL DE $E[\sigma^2[N, T, \tau]]$ (phase stationnaire) 73

VIII,3.1. Cas général ($T > \tau$) 73

VIII,3.2. Mesures adjacentes ($T = \tau$) 74

VIII,3.3. Mesures non corrélées ($T \gg \tau_{corr.}$) 76

VIII,4. CALCUL DE $E[\sigma^2[N, T, \tau]]$ (diffusion de la phase) 76

VIII,5. CALCUL DE LA VARIANCE DE $\sigma^2[N, T, \tau]$ 78

VIII,6. APPLICATION AUX BRUITS THERMIQUES 80

VIII,6.1. Bruit thermique interne 80

VIII,6.1.1. Expressions classiques 80

VIII,6.1.2. Expressions généralisées 81

VIII,6.1.3. Discussion de la loi $R_i(N, \tau)$ 81

VIII,6.2. Bruit thermique externe 81

VIII,6.2.1. Expressions classiques 81

VIII,6.2.2. Expressions généralisées 82

VIII,6.2.3. Discussion de la loi $R_e(N, \tau)$ 82

VIII,6.3. Conclusion sur le choix de N 82

VIII,7. APPLICATION A LA LOI $I^2(\tau) = A/\tau^\alpha$ ($\alpha > 0$) 82

VIII,8. APPLICATION AU BRUIT DE SCINTILLATION DE FRÉQUENCE 83

VIII,9. RELATION ENTRE $E[\sigma^2[N, \tau, \tau,]]$ et $S_\varphi(f)$ 83

VIII,10. REMARQUES COMPLÉMENTAIRES SUR LA DÉTERMINATION DE L'INSTABILITÉ DE FRÉQUENCE 84

Chapitre IX - Une technique expérimentale pour l'estimation de $I(\tau)$ 87

IX,1. DESCRIPTION DE LA TECHNIQUE EXPÉRIMENTALE 87

IX,1.1. Principe général 87

IX,1.2. Appareils utilisés : 88

IX,1.2.1. Comparateur de fréquence à multiplication d'erreur 88

IX,1.2.2. Générateur d'intervalles de temps étalons 88

IX,1.2.3. Chronomètre à haute résolution 90

IX,2. ANALYSE THÉORIQUE 90

IX,2.1. Calcul de la fréquence de sortie du comparateur 90

IX,2.2. Relation entre $I(\tau)$ et l'écart-type des durées mesurées 91

Quatrième Partie : LE GÉNÉRATEUR SINUSOÏDAL EN TANT QU'INSTRUMENT DE PHYSIQUE

Chapitre X - Observation d'un phénomène spectroscopique : la résonance paramagnétique électronique 93

X,1. RAPPELS SUR LA RÉSONANCE PARAMAGNÉTIQUE ÉLECTRONIQUE ET SON OBSERVATION 93
X,2. UN SPECTROMÈTRE HYPERFREQUENCE A PONT 94
X,3. SENSIBILITÉ D'UN SPECTROMÈTRE 95
X,4. BRUIT THERMIQUE DE LA CAVITÉ DE MESURE EN TANT QUE BRUIT ADDITIF EXTERNE DE L'OSCILLATEUR D'EXCITATION 96
X,4.1. Sans R.P.E. 96
X,4.2. Avec R.P.E. Sensibilité ultime du spectromètre 97
X,5. EFFETS DES VARIATIONS LENTES DE LA FREQUENCE DE RESONANCE DE LA CAVITE DE MESURE. INFLUENCE SUR LA SENSIBILITE 98

Chapitre XI - Effets du bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation sur l'observation de la R.P.E. 101

XI,1. PUISSANCE HYPERFRÉQUENCE RÉFLÉCHIE PAR LA CAVITÉ 101
XI,1.1. Coefficients de réflexion de la cavité de mesure 101
XI,1.1.1. $\Gamma(f)$ sans R.P.E. 101
XI,1.1.2. $\Gamma'(f)$ avec R.P.E. 102
XI,1.2. Signal d'excitation idéal 104
XI,1.2.1. P_R sans R.P.E. 104
XI,1.2.2. P'_R avec R.P.E. 104
XI,1.2.3. P_R compte tenu de $\Delta f_o(t)$ 104
XI,1.3. Signal d'excitation à phase stationnaire 105
XI,1.3.1. P_R sans R.P.E. 105
XI,1.3.2. P'_R avec R.P.E. 106
XI,1.3.3. P_R compte tenu de $\Delta f_o(t)$ 107
XI,1.4. Signal d'excitation à diffusion de phase 108
XI,1.4.1. P_R sans R.P.E. 108
XI,1.4.2. P'_R avec R.P.E. 109
XI,1.5. Conclusions 110
XI,2. ANALYSE BASSE-FRÉQUENCE 110
XI,2.1. Signaux incidents sur le détecteur synchrone 110
XI,2.1.1. Spectromètre à une cavité 111
XI,2.1.2. Spectromètre à deux cavités 111
XI,2.2. Signal de sortie du détecteur synchrone 112
XI,2.2.1. Spectromètre à une cavité 112
XI,2.2.2. Spectromètre à deux cavités 114
XI,2.2.3. Spectre du signal de R.P.E. 115
XI,2.3. Influence de $\Delta f_o(t)$ 116
XI,3. SENSIBILITÉ DU SPECTROMÈTRE A UNE CAVITÉ 118
XI,3.1. Sensibilité en dispersion : influence de l'oscillateur seul 118
XI,3.1.1. Cas du bruit thermique interne 118
XI,3.1.2. Cas du bruit thermique externe 119
XI,3.1.3. Cas du bruit de scintillation de fréquence 119
XI,3.1.4. Conclusion sur la sensibilité en dispersion 120
XI,3.2. Sensibilité en dispersion : influence du bruit de scintillation de la cavité 121
XI,3.3. Sensibilité en absorption 121
XI,4. SENSIBILITÉ DU SPECTROMÈTRE A DEUX CAVITÉS 122
XI,5. VARIATION DE LA SENSIBILITÉ LORSQUE $\Delta\nu$ DÉCROIT 123
XI,6. EFFET DE LA DURÉE DE MESURE τ_o SUR LA SENSIBILITÉ 124
XI,6.1. Signal minimum détectable 124
XI,6.2. Application à la sensibilite du spectromètre (à une cavité) 124
XI,7. EFFET DE LA MODULATION DU CHAMP MAGNÉTIQUE SUR LA SENSIBILITÉ 126
XI,7.1. Sensibilité en dispersion 126
XI,7.2. Application aux principaux bruits de l'oscillateur 127
XI,8. CONCLUSIONS 128

CONCLUSION GÉNÉRALE 129

ANNEXES DE CALCUL 130

RÉFÉRENCES 138

PRINCIPALES NOTATIONS

$v(t)$	signal issu d'un générateur
A_o	amplitude du signal
ω_o	fréquence angulaire du signal
f_o	fréquence du signal
$\omega(t)$	fréquence angulaire instantanée
$\dot{\phi}(t)$	fluctuations de fréquence angulaire
$f(t)$	fréquence instantanée
$\dot{\varphi}(t)$	fluctuations de fréquence
$S_x(f)$	densité spectrale de puissance du processus aléatoire $x(t)$
$R_x(\tau)$	fonction d'autocorrélation du processus aléatoire $x(t)$
$\phi(t)$	fluctuations de phase
$\alpha(t)$	fluctuations d'amplitude
$I(\tau)$	instabilité de fréquence pendant la durée τ
Σ_v	largeur de raie du spectre de radiofréquence
$E[\ ]$	opérateur espérance mathématique
$\sigma[x]$	écart-type de x
$\Gamma(f)$	cœfficient de réflexion

INTRODUCTION

LE GÉNÉRATEUR SINUSOÏDAL : ÉTALON DE FRÉQUENCE ET INSTRUMENT DE PHYSIQUE

Le développement prodigieux de l'utilisation des ondes électromagnétiques, et les performances de plus en en plus élevées souhaitées par les utilisateurs, ont nécessité la réalisation de générateurs de fréquence ultra-performants.

Ces générateurs de très haute qualité ont permis l'amélioration des télécommunications, l'augmentation de la résolution des radars, de nombreuses expériences spatiales, des mesures spectroscopiques nouvelles, etc...

De plus, les générateurs de fréquence atomiques se prêtent à la mise en œuvre d'expériences irréalisables à l'aide de générateurs de qualité inférieure : le maser à hydrogène est utilisé dans le cadre d'expériences ayant pour but la vérification de la relativité générale (l'une d'elles vise à déterminer la variation de la vitesse de la lumière dans un champ gravitationnel intense) ; l'utilisation des «horloges atomiques» permet la conception et la réalisation de nouveaux dispositifs de trajectographie. En outre, les étalons atomiques permettent d'obtenir un intervalle de temps d'une manière si reproductible que la seconde a été définie comme étant la durée de 9 192 631 770,000 périodes d'oscillation de la transition hyperfine ($F = 4, m_F = 0) \leftrightarrow (F = 3, m_F = 0)$ de l'état fondamental $S_{1/2}$ de l'atome de césium 133.

De tels progrès dans la génération et dans la mesure d'une grandeur physique font que, de toutes les mesures physiques, celle des fréquences est de loin la plus précise. De plus, de nouveaux concepts et une terminologie nouvelle se sont révélés indispensables pour une caractérisation adéquate de ces générateurs de fréquence ; plusieurs années ont été nécessaires pour l'établissement de définitions précises pour les paramètres caractéristiques de la stabilité de fréquence à court terme.

Les qualités d'un étalon atomique peuvent être décrites par son exactitude (qualité d'un étalon qui délivre une fréquence qui coïncide avec la fréquence de la transition atomique ou moléculaire), sa précision (relative à la mesure de fréquence proprement dite, et limitée en fait par la stabilité ultime des générateurs), sa reproductibilité (relative à l'accord de fréquence entre différents étalons, ou pour un même étalon d'une mise en marche à l'autre), sa stabilité de fréquence et sa pureté spectrale sur lesquelles nous reviendrons très en détail.

•

Des mécanismes physiques de natures diverses perturbent le fonctionnement de tout générateur de fréquence, créant des écarts entre le signal réellement émis et le signal sinusoïdal idéal ; ces écarts aléatoires ou systématiques viennent affecter les performances de toute expérience utilisant le générateur.

Parmi les nombreuses utilisations, deux catégories principales peuvent être distinguées :

1) Les applications relatives au domaine de la métrologie des fréquences ou à l'élaboration des échelles de temps, et qui nécessitent principalement une excellente stabilité de la fréquence émise en fonction du temps, ainsi qu'une caractérisation adéquate de cette stabilité.

2) Les applications appartenant au domaine de l'instrumentation scientifique, telle la spectroscopie hertzienne, et qui nécessitent surtout une très haute qualité du signal dans le domaine fréquence (haute pureté spectrale).

Ces considérations nous permettent de dégager les grandes lignes du plan adopté.

La première partie sera consacrée à une présentation des principaux étalons de fréquence, à une définition précise de la caractérisation des signaux émis, et principalement à l'établissement des relations mathématiques générales qui existent entre les paramètres caractéristiques de la stabilité de fréquence et ceux caractéristiques de la pureté spectrale.

Cette unification de la caractérisation des oscillateurs sera suivie, dans la seconde partie, par une étude des principales sources de bruit présentes dans tout générateur de fréquence. Une analyse détaillée des effets du bruit thermique interne additif des oscillateurs sera présentée, ainsi qu'un modèle aléatoire stationnaire de bruit de scintillation de fréquence.

Dans la troisième partie seront étudiés différents problèmes relatifs à la précision des mesures de fréquence et à la détermination pratique de l'instabilité de fréquence (une technique expérimentale développée à l'O.N.E.R.A. sera décrite et analysée).

La quatrième partie enfin, est consacrée à l'étude d'une utilisation de l'oscillateur dans le domaine de l'instrumentation scientifique. L'analyse d'un spectromètre hertzien sera développée en introduisant précisément les effets du bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation.

Première Partie
CARACTÉRISATION DES GÉNÉRATEURS SINUSOÏDAUX

Le chapitre I présente un rappel des phénomènes physiques et des principes utilisés pour la mise en œuvre de générateurs sinusoïdaux de très haute qualité.

L'importance du chapitre II résulte de ce que tous les paramètres fondamentaux utilisés dans ce travail y sont définis très précisément.

Le chapitre III, qui présente une unification du problème de la caractérisation des générateurs de fréquence sinusoïdaux, constitue le chapitre fondamental de cette première partie.

Chapitre I
GÉNÉRATEURS DE FRÉQUENCE A HAUTES PERFORMANCES

La caractéristique commune à tous les générateurs de fréquence de haute qualité est l'utilisation d'un phénomène physique naturel, périodique, stable et rapide.

Ces phénomènes, ainsi que les techniques mises en œuvre pour leur utilisation, sont rappelés dans ce chapitre. La distinction entre étalon primaire et étalon secondaire sera évoquée, ainsi que le développement des étalons de fréquence dans le domaine optique.

I,1. Les oscillateurs à quartz

LE CRISTAL DE QUARTZ. Cet oscillateur utilise l'effet piézo électrique du cristal de quartz [3] : une lame de de quartz convenablement taillée et soumise à une tension électrique alternative présente un phénomène de résonance lorsque la fréquence de cette tension est égale à l'une des fréquences de vibration mécanique de la lame. L'entretien des oscillations ainsi produites est réalisé en incorporant le quartz dans un circuit électronique d'entretien. La fréquence du signal délivré est déterminée principalement par la fréquence propre du quartz ; celle-ci dépend de la coupe utilisée et des dimensions de la lame de quartz. Les principaux modes de vibration utilisés sont les vibrations de flexion (5 à 50 kHz) ; les vibrations longitudinales (50 à 500 kHz) ; les vibrations de cisaillement en épaisseur permettant d'atteindre des fréquences de l'ordre de 10 MHz.

Pour chaque mode, la longueur d'onde de la vibration mécanique est proportionnelle à la dimension le long de laquelle se fait cette vibration. L'obtention d'une bonne stabilité de fréquence nécessite de nombreuses précautions (cristal sous vide pour supprimer l'amortissement de l'air, thermostat, faible puissance dissipée, faces métallisées, etc...).

CIRCUIT ÉLECTRIQUE ÉQUIVALENT

Au voisinage de l'une de ses résonances, le cristal de quartz est représentable par un schéma électrique équivalent permettant d'étudier son impédance et de définir un cœfficient de qualité. Un schéma équivalent simple est représenté sur la figure 1 : C_o est la capacité constituée par : les capacités entre connexions de la

structure maintenant le cristal, la capacité électrostatique au repos entre les faces du cristal et toutes les capacités parasites introduites par le support.

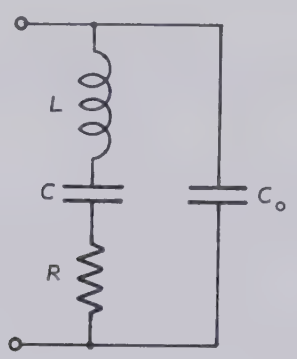


Fig. 1 - Schéma équivalent simplifié du cristal de quartz

L représente la masse du cristal

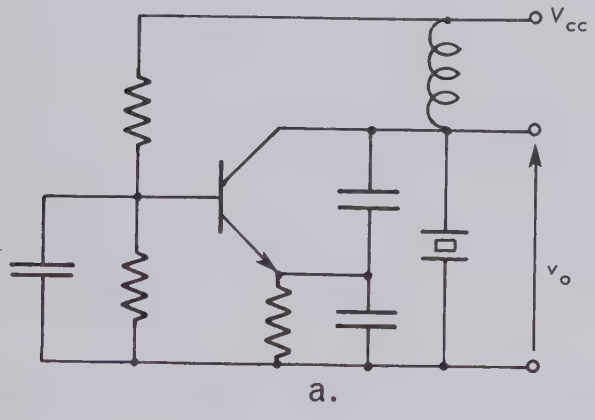
C représente l'élasticité du cristal

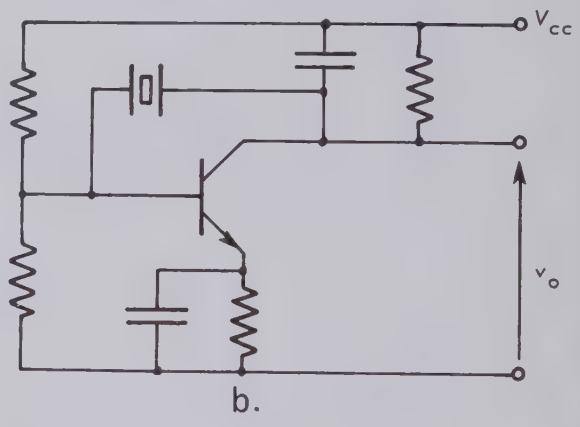
R représente les frottements mécaniques et permet le calcul de l'énergie dissipée en chaleur dans le cristal.

SCHÉMAS D'OSCILLATEURS STABILISÉS PAR UN QUARTZ

Le cristal de quartz peut être localisé de différentes manières pour stabiliser un circuit oscillateur (fig. 2). Tous ces montages peuvent être étudiés en remplaçant le cristal par son schéma équivalent. La très haute qualité du signal émis résulte de la valeur élevée du cœfficient de qualité du quartz (de l'ordre de 10^6).

En conclusion, l'utilisation de la piézoélectricité du cristal de quartz, jointe à de nombreuses précautions d'ordre technologique et à une conception adéquate des circuits électroniques, permet de réaliser un oscillateur de très haute qualité* et de mise en œuvre relativement aisée [4].





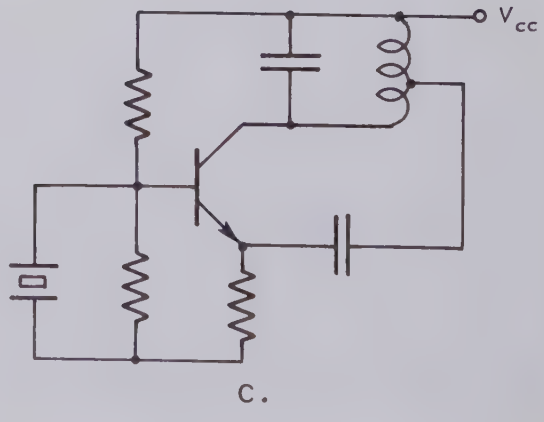


Fig. 2 - Trois exemples d'oscillateurs stabilisés par un quartz

a. analogue à l'oscillateur de Colpitts

b. analogue à l'oscillateur de Pierce

c. analogue à l'oscillateur de Hartley.

---

* *Les paramètres définissant précisément la qualité d'un oscillateur seront définis au chapitre II.*

I,2. Les étalons de fréquence atomiques et moléculaires

Pour certaines utilisations, l'oscillateur à quartz présente le défaut de posséder une lente variation systématique (dérive) de sa fréquence avec le temps, résultant du phénomène de «vieillissement» du quartz.

Des étalons de fréquence pratiquement affranchis de cette dérive ont été réalisés en utilisant un autre phénomène périodique naturel qui est, par nature, insensible à tout vieillissement : les transitions quantiques entre niveaux d'énergie atomiques ou moléculaires, dont les fréquences sont calculables en utilisant le formalisme de la mécanique quantique. Un problème se pose lors de l'utilisation des transitions quantiques : d'une manière simple, chaque atome émettant un photon peut être considéré comme un oscillateur dont l'amortissement est total au cours d'une durée très brève ; or, l'émission d'une oscillation sinusoïdale entretenue nécessite un oscillateur unique et non un grand nombre d'atomes dont les effets se «brouillent» les uns les autres.

Deux solutions ont été apportées à ce problème par la réalisation des étalons atomiques passifs (oscillateur à quartz asservi à une fréquence de transition quantique), et des étalons atomiques ou moléculaires actifs (utilisant le phénomène d'émission induite) [5].

I,3. Les générateurs atomiques passifs

Un étalon atomique passif comprend un oscillateur à quartz stabilisé par un dispositif électronique asservissant sa fréquence sur celle d'une transition atomique. L'inversion de population nécessaire pour la stabilisation est créée, soit par pompage optique, soit par la méthode des jets.

I,3.1. Générateur à vapeur de rubidium (pompage optique)

PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT :

La fréquence issue d'un oscillateur à quartz est multipliée et asservie à la fréquence de résonance de l'atome de rubidium 87 correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins ($F = 1$, $m = 0$) et ($F = 2$, $m = 0$) de l'état fondamental. La détection de cette fréquence ($\simeq$6834 MHz) est effectuée en utilisant la méthode du pompage optique découverte par **A. Kastler** [6].

UTILISATION DU POMPAGE OPTIQUE :

La figure 3 représente le diagramme simplifié des niveaux d'énergie de l'atome de rubidium 87.

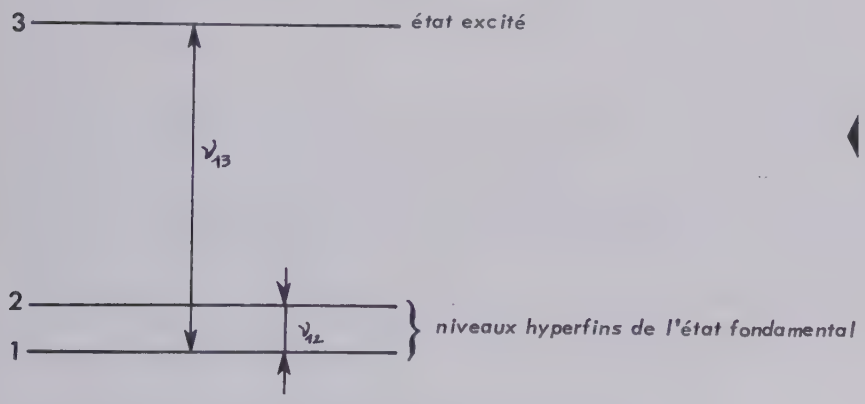


Fig. 3 - Diagramme simplifié des niveaux d'énergie du rubidium.

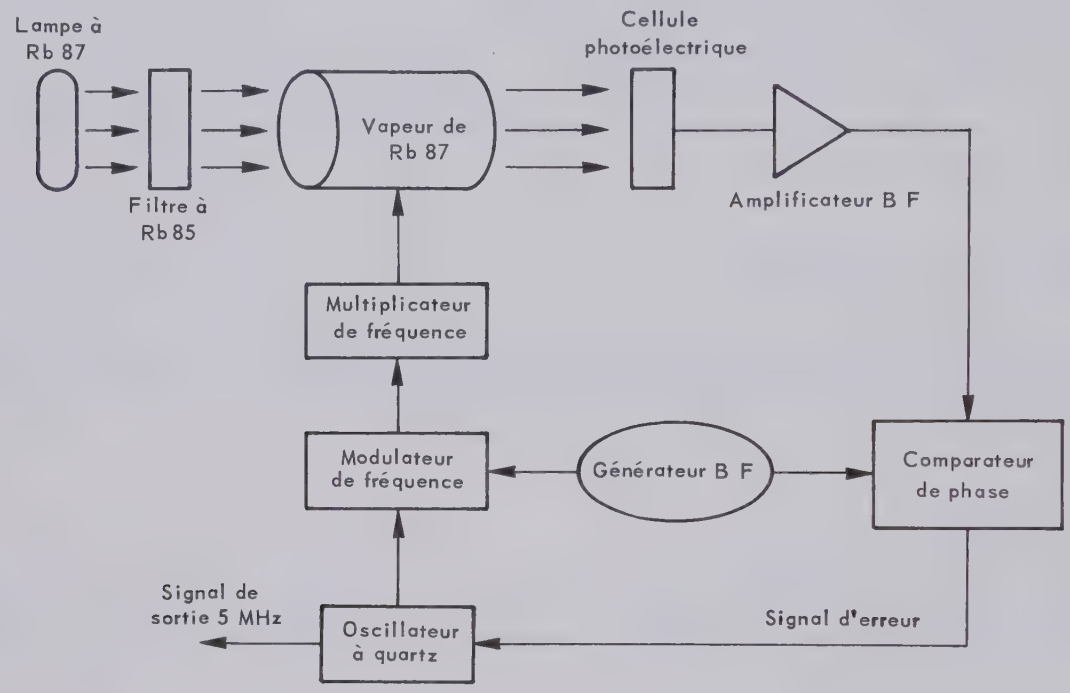
La transition 1-2 a pour fréquence $\nu_{12} \simeq$ 6834 MHz (domaine classique des hyperfréquences). La transition 1-3 appartient au domaine des longueurs d'onde optiques ($\lambda \simeq 8000$ Å). Une absorption à la fréquence ν_{12} sera observée par création d'une inversion de population entre les états 1 et 2. Cette inversion est produite en éclairant la vapeur de Rb 87 contenue dans une ampoule par un rayonnement de fréquence ν_{13} (on filtre ν_{23}) : les atomes, portés du niveau 1 au niveau 3, retombent en égale quantité vers les niveaux 1 et 2, d'où un dépeuplement de 1 par rapport à 2.

Une onde hyperfréquence ν_{12} appliquée sur les atomes tend à égaliser les populations des niveaux 1 et 2, créant une absorption lumineuse.

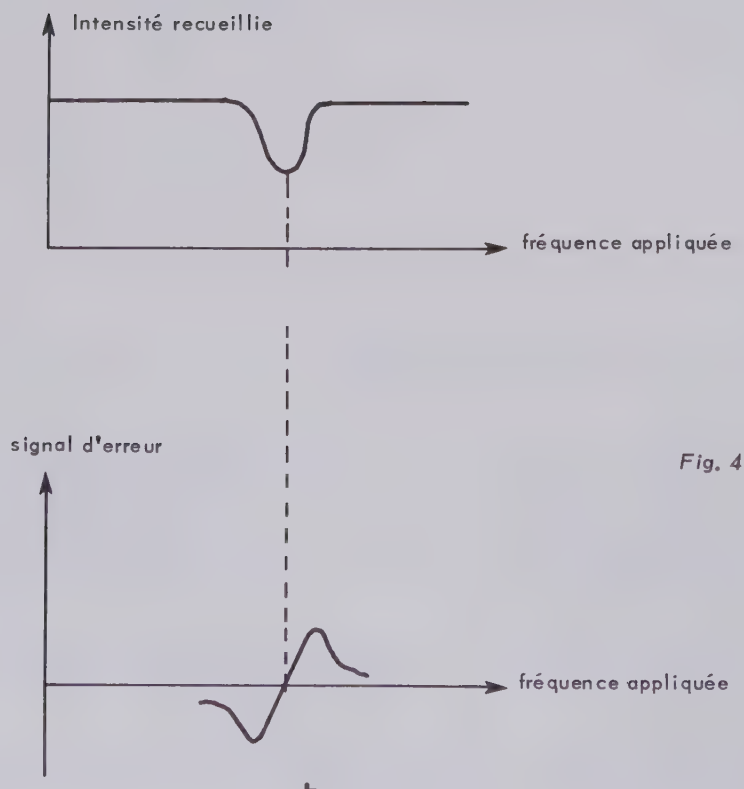
La courbe donnant la variation de l'intensité lumineuse recueillie sur une cellule photoélectrique, en fonction de la fréquence de l'onde hyperfréquence appliquée, est utilisée pour la réalisation de l'asservissement (fig. 4b).

RÉALISATION PRATIQUE :

La figure 4a reproduit le schéma de l'étalon, comportant les principaux éléments constitutifs. Le signal à la fréquence 6834 MHz est modulé en fréquence afin de balayer la raie de résonance, créant ainsi une modulation d'amplitude du faisceau lumineux transmis, détectée par une cellule photoélectrique. Le déphasage existant entre la modulation appliquée et la modulation restituée s'annule au centre de la raie de résonance, constituant le signal d'erreur qui permet de contrôler la fréquence de l'oscillateur à quartz.



a.



b.

Fig. 4 - Horloge à vapeur de rubidium

a - Schéma de principe

b - Intensité lumineuse recueillie et signal d'erreur

I,3.2. Générateur à jet d'atomes de césium [5]

La fréquence d'un oscillateur à quartz est multipliée et asservie sur la fréquence de résonance de l'atome de césium 133 correspondant à la transition entre les niveaux (F = 4, m = 0) et (F = 3, m = 0).

RÉALISATION PRATIQUE (fig. 5) :

Un four à césium produit un jet atomique contenant des atomes dans les états F = 3 et F = 4. Les atomes F = 3 sont éliminés du jet par un champ magnétique inhomogène créant une déviation inverse pour les atomes F = 3 et F = 4 dont les moments sont de signes contraires. Le jet d'atomes F = 4 traverse une cavité résonnante accordée sur la fréquence de transition ($\simeq$ 9192 MHz).

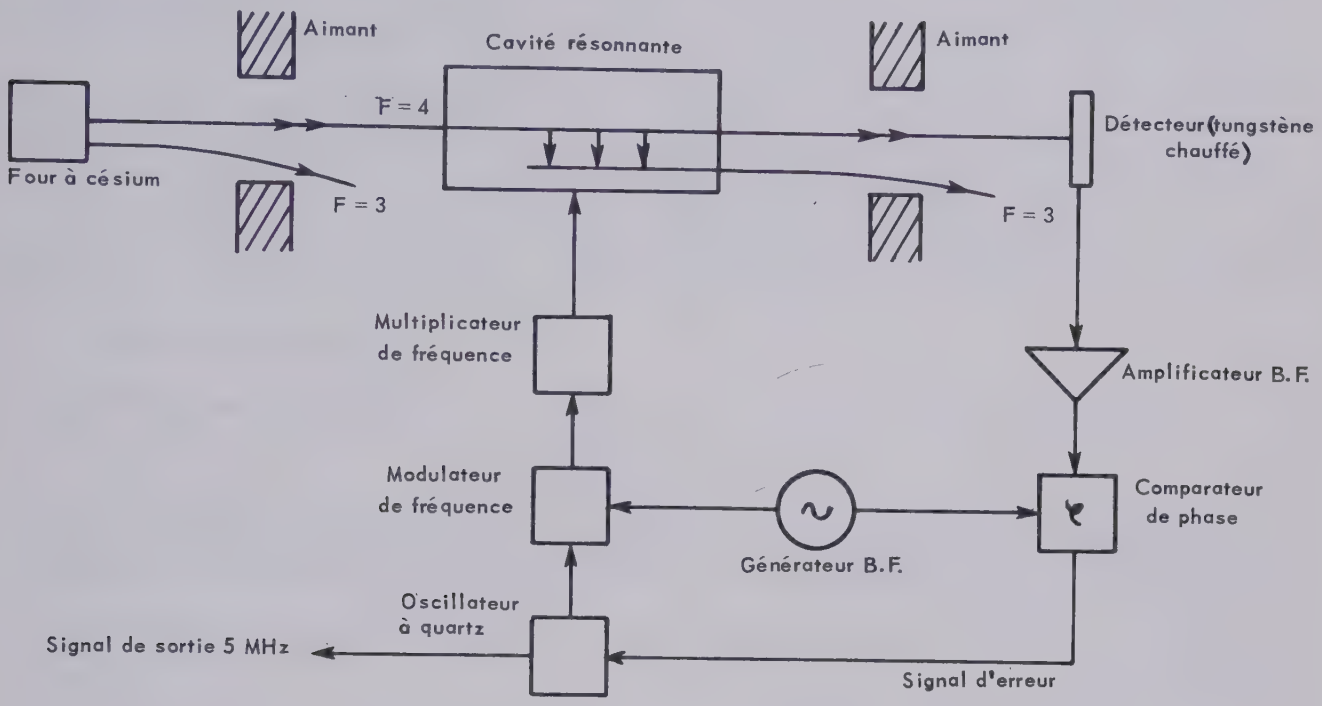


Fig. 5 - Horloge à jet de césium

En absence de résonance, ces atomes sont focalisés par un second aimant sur un détecteur à fil de tungstène chauffé, produisant un courant électrique (chaque atome ayant perdu un électron au contact du tungstène).

Si un signal hyperfréquence est introduit dans la cavité, certains atomes retombent sur le niveau F = 3, et sont par suite déviés du détecteur par le second aimant ; une diminution du courant détecté en résulte, utilisable pour réaliser l'asservissement.

Le signal d'erreur assurant la coïncidence de la fréquence (multipliée) issue du quartz avec la fréquence de la transition atomique, est produit par la comparaison des phases d'une modulation de fréquence appliquée et de la modulation restituée.

I,4. Les générateurs atomiques ou moléculaires actifs

Le signal de sortie des étalons actifs est obtenu en faisant osciller directement un système atomique ou moléculaire dans lequel une inversion de population a été réalisée, ce système étant placé dans une cavité résonnante à cœfficient de qualité élevé, accordée à la fréquence de transition utilisée.

Les propriétés de l'effet M.A.S.E.R. [7] (amplification des microondes par émission stimulée de rayonnement) permettent d'expliquer les caractéristiques du signal produit : l'oscillateur atomique stimulé est cohérent avec l'oscillateur atomique inducteur (trains d'ondes associés en phase et se propageant dans la même direction) ; en conséquence, malgré la présence d'un très grand nombre d'oscillateurs et l'amortissement individuel de chacun d'eux, le système est équivalent à un oscillateur unique fonctionnant en régime entretenu.

C'est l'énergie potentielle des atomes ou des molécules neutres qui est transformée en énergie électromagnétique [8].

I,4.1. Le maser à ammoniac [9]

Ce maser utilise la transition moléculaire entre les états J = 3 et K = 3 de la molécule d'ammoniac (raie 3-3 du spectre d'inversion ; fréquence ≃ 23 870 MHz).

PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT (fig. 6) :

Le jet moléculaire issu du gicleur contient des molécules dans les états inférieur et supérieur en nombre sensiblement égal. Le séparateur électrostatique concentre le long de l'axe (zone de champ pratiquement nul) les molécules de l'état supérieur ; les molécules de l'état inférieur sont déviées vers les zones de champ intense et sont éliminées du jet. L'inversion de population est ainsi créée par triage des molécules.

Le jet moléculaire (état supérieur) est introduit dans une cavité hyperfréquence résonnante accordée sur la fréquence de transition, où des transitions sont stimulées par le champ hyperfréquence dû au rayonnement du corps noir.

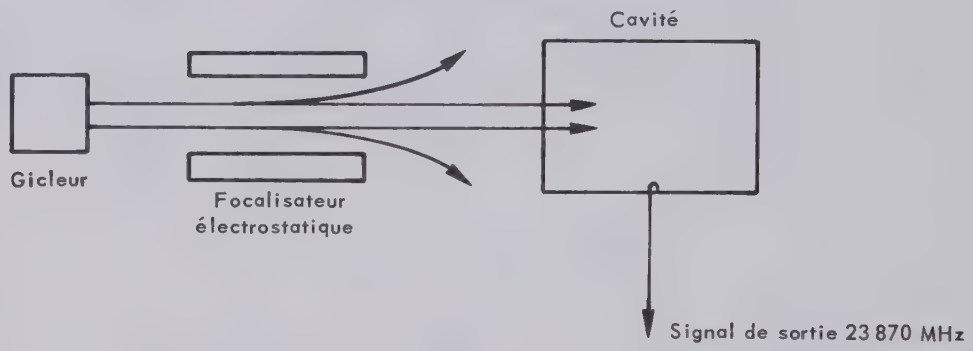


Fig. 6 - Maser à ammoniac

L'énergie libérée par les transitions peut compenser les pertes si certaines conditions sont réalisées (facteur de qualité de la cavité suffisamment élevé ; cavité convenablement accordée ; nombre suffisant de molécules).

Une oscillation sinusoïdale entretenue est ainsi créée par effet M.A.S.E.R. à la fréquence de la transition moléculaire.

I,4.2. Le maser à hydrogène atomique [10]

Ce maser utilise la transition entre les états (F = 1, m = 0) et (F = 0, m = 0) de l'atome d'hydrogène (≃ 1420 MHz).

PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT (fig. 7) :

Une décharge haute fréquence dissocie l'hydrogène moléculaire en hydrogène atomique. Le jet d'atomes produit passe au centre d'un aimant hexapolaire qui fait diverger les atomes de l'état F = 0 et converger les atomes de l'état F = 1.

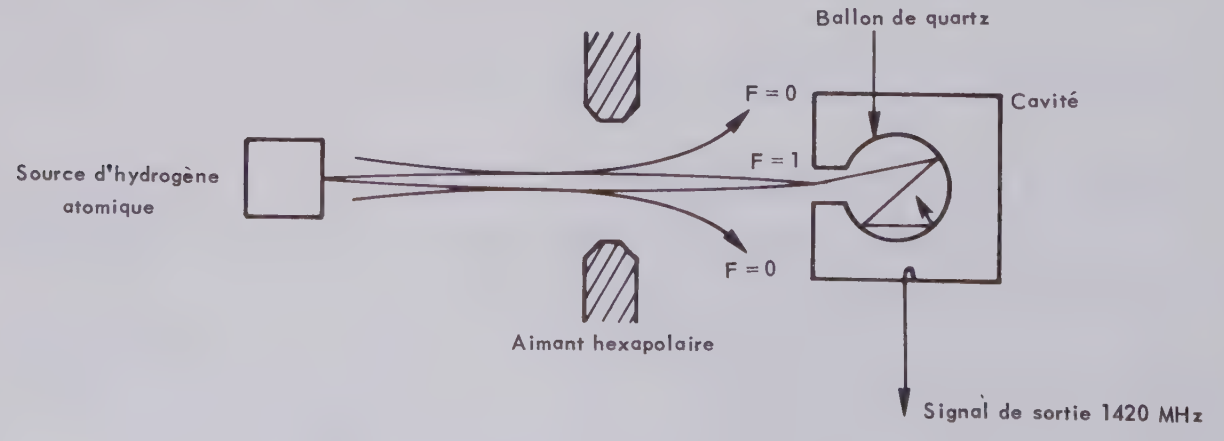


Fig. 7 - Maser à hydrogène

Le jet atomique est alors introduit dans un ballon de quartz placé dans une cavité résonnante accordée à 1420 MHz.

Les conditions de fonctionnement étant réalisées, une oscillation maser à 1420 MHz est créée dans la cavité et est prélevée par une boucle de couplage.

1,5. Etalons de fréquence primaires et secondaires

Les étalons atomiques ou moléculaires ont été classés en actifs ou passifs selon le mode d'utilisation de la transition quantique.

D'autres classifications sont possibles, par exemple selon la technique utilisée pour réaliser l'inversion de population (jet ou pompage optique).

Une autre classification importante divise les étalons de fréquence en primaires et secondaires :

Un étalon est primaire[11] *lorsque la fréquence émise est pratiquement indépendante de sa construction :* c'est généralement le cas des horloges à jets (césium, hydrogène) où la fréquence de transition ne dépend pratiquement que des propriétés de l'atome ; un étalon primaire se caractérise par une très haute reproductibilité de la fréquence émise.

Un étalon possédant une erreur de calage initial est dit secondaire : la fréquence émise, bien que très stable, ne peut être exactement prévue avant la mise en fonctionnement. C'est le cas de l'étalon à vapeur de rubidium dont la fréquence dépend en particulier de la composition et de la pression du gaz tampon.

1,6. Etalons de fréquence dans le domaine optique

Les étalons atomiques et moléculaires évoqués ci-dessus fonctionnent, soit à 5 MHz (fréquence de sortie des étalons passifs), soit dans la gamme hyperfréquence pour les étalons actifs.

L'apparition puis le rapide développement des lasers permettent d'envisager la mise en œuvre d'un étalon de fréquence dans le domaine optique (10^{12} à 10^{15} Hz). Un laser monomode émet en effet un signal qui est, à une fréquence optique, l'analogue du signal émis par un oscillateur radio-électrique (les sources lumineuses classiques émettant un signal qui est, du point de vue statistique, l'analogue du bruit radioélectrique).

Toutefois, malgré ses très grandes qualités de monochromaticité, directivité et intensité, le laser est affecté d'une stabilité de fréquence relativement médiocre résultant de ce que la fréquence émise est liée à la fréquence de résonance d'une cavité à l'intérieur de laquelle une excitation importante doit être entretenue [12].

L'utilisation des lasers en étalon de fréquence nécessite donc des moyens pour stabiliser la fréquence émise ; divers procédés de stabilisation sont actuellement étudiés [13, 14].

En outre, la notion même d'étalon de fréquence implique la possibilité de compter cette fréquence optique ou, de façon équivalente, de la comparer à des fréquences beaucoup plus basses mesurables à l'aide d'un compteur classique. Les opérations de multiplication et de mélange de fréquences, aisées dans la gamme hyperfréquence, sont étendues progressivement vers des fréquences de plus en plus élevées, généralement à l'aide de diodes à pointe spéciales (élément non-linéaire) [18] :

Au delà de l'aspect purement métrologique, la réalisation d'un laser très stable présente un très grand intérêt physique : la détermination simultanée de sa fréquence et de sa longueur d'onde devrait permettre une détermination de la vitesse de la lumière avec une précision très supérieure à celle des méthodes actuelles.

Chapitre II

REPRÉSENTATIONS ET PARAMÈTRES CARACTÉRISTIQUES D'UN SIGNAL QUASI-SINUSOÏDAL

La nécessité d'une terminologie et de définitions précises a été notée dans l'introduction. C'est le but de ce chapitre que de définir précisément les modèles mathématiques et les paramètres caractéristiques qui seront utilisés dans toute la suite de ce travail.

La dualité entre instabilité de fréquence et pureté spectrale du signal est précisée ; le tableau I résume schématiquement les éléments présentés dans ce chapitre.

II,1. Représentations mathématiques d'un signal quasi-sinusoïdal

Tous les générateurs de fréquence sont perturbés par divers mécanismes physiques (cf. chapitre IV) créant des écarts entre le signal réellement émis et la sinusoïde idéale.

Des modèles mathématiques représentant l'onde réelle quasi-sinusoïdale sont indispensables. Des éléments aléatoires interviennent alors, du fait de la nature aléatoire* des principales perturbations physiques.

II,1.1. Modèles à sauts de fréquence, de phase et d'amplitude

Une onde quasi-sinusoïdale peut être représentée par un modèle discontinu construit selon le principe suivant [15] : soit une distribution stationnaire de points t_i sur l'axe temporel (fig. 8) ; le signal est sinusoïdal entre deux points consécutifs, et possède une amplitude, une fréquence et une phase données ; à chaque instant t_i se produisent des brusques sauts d'amplitude, de fréquence et de phase. Ces trois grandeurs sont des variables aléatoires statistiquement indépendantes (entre elles, et pour chacune d'elles : d'un t_i à l'autre).

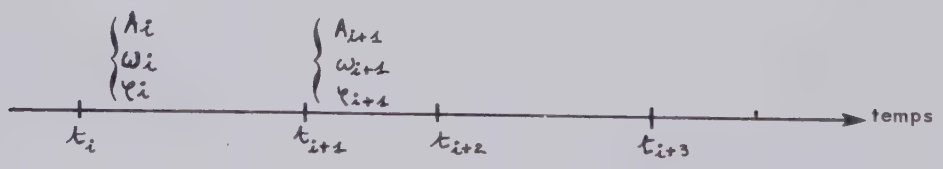


Fig. 8 - Distribution stationnaire de points

L'onde quasi-sinusoïdale est ainsi représentée par une fonction aléatoire formée de tronçons sinusoïdaux ; ce modèle présente une très grande souplesse car des hypothèses variées peuvent être faites sur :

- la loi de distribution des instants de saut ;
- la densité de probabilité de la variable aléatoire amplitude ;
- la densité de probabilité de la variable aléatoire fréquence ;
- la densité de probabilité de la variable aléatoire phase.

Il est ainsi possible de construire des signaux possédant des propriétés statistiques extrêmement variées : leurs spectres en particulier peuvent présenter des allures très diverses.

Dans son étude sur la précision ultime des horloges radioélectriques, **Blaquière** considère un modèle d'oscillateur perturbé par le bruit thermique qui le conduit, pour le signal émis, à un cas particulier de ce modèle [24, 25]:

---

* *On ne s'intéresse pas ici aux perturbations systématiques.*

Nous utiliserons une représentation de ce type pour développer un modèle de bruit de fréquence en $1/f$ (chapitre VI).

II,1.2. Modèles à fluctuations aléatoires continues

Un signal quasi-sinusoïdal peut également être représenté par l'expression [16] :

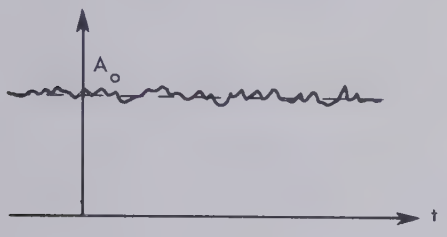
(1) $$v(t) = [A_0 + a(t)] \cdot \cos [\omega_0 t + \phi(t)]$$

où les fonctions aléatoires $a(t)$ et $\phi(t)$, variant lentement par rapport à $\cos\omega_0 t$, représentent respectivement les fluctuations d'amplitude et de phase autour des valeurs A_0 et $\omega_0 t$ relatives à l'oscillation idéale.

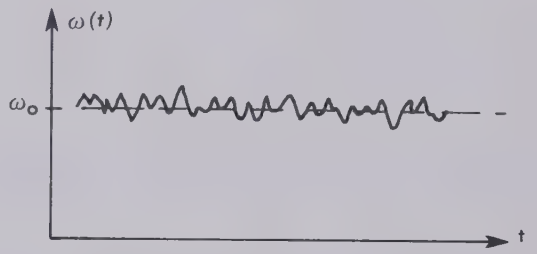
La fréquence angulaire instantanée est la dérivée temporelle de la phase totale :

(2) $$\omega(t) = \frac{d}{dt} (\omega_0 t + \phi(t)) = \omega_0 + \dot{\phi}(t)$$

Le processus aléatoire $\dot{\phi}(t)$ représente les fluctuations de fréquence angulaire autour de la valeur moyenne ω_0 (fig. 9). La notion de fréquence instantanée n'a toutefois de sens que si $\omega_0 + \dot{\phi}(t)$ reste constant pendant une durée égale à plusieurs périodes $2\pi/\omega_0$ du signal ; cette condition est réalisée lorsque $\dot{\phi}(t)$ varie lentement par rapport à $\cos\omega_0 t$ ($2\pi/\omega_0 \ll$ temps de corrélation de $\dot{\phi}(t)$).



Fluctuations de l'amplitude



Fluctuations de la fréquence angulaire

Fig. 9

Pour les oscillateurs de très haute qualité, la théorie et l'expérience montrent que les effets des fluctuations d'amplitude sont généralement négligeables devant ceux des fluctuations de phase ; le modèle représentant le signal prend alors la forme simplifiée :

(3) $$v(t) = A_0 \cos [\omega_0 t + \phi(t)]$$

Ce modèle est utilisé unanimement pour représenter le signal de sortie d'un oscillateur perturbé par des bruits stationnaires [1, 2]. Sa souplesse résulte des propriétés statistiques variées attribuables aux processus aléatoires $\phi(t)$ ou $\dot{\phi}(t)$.

Dans la suite, le processus $\dot{\phi}(t)$ sera *toujours* stationnaire (ou stationnaire du second ordre). Il n'en sera *pas* toujours de même pour $\phi(t)$ qui pourra être, soit stationnaire, soit à diffusion (cf. chapitre V).

II,1.2.1. Modèles à stationnarité de phase

L'étude du bruit thermique externe des oscillateurs (voir les paragraphes IV,2 et V,2) donne un signal où la fluctuation de phase $\phi(t)$ est stationnaire.

Il en résulte la propriété importante suivante : la densité spectrale de puissance (définie par l'équation 18) du signal $v(t)$ contient une composante discrète représentée par une distribution de Dirac centrée sur la fréquence porteuse f_0 (fig. 10a).

II,1.2.2. Modèles à diffusion de phase

La théorie du bruit thermique interne des oscillateurs (voir les paragraphes IV,1 et V,1) montre que le

processus aléatoire $\dot{\phi}(t)$ est stationnaire. Le processus $\phi(t) = \int_o^t \dot{\phi}(\theta)\, d\theta$ n'est alors pas nécessairement stationnaire : si la fréquence angulaire instantanée possède une densité spectrale de puissance constante à l'origine, il y a nécessairement une «diffusion» de phase [17] (étudiée ici en détail dans le cas du bruit thermique interne).

La densité spectrale de puissance du signal $v(t)$ est alors une courbe continue centrée sur la fréquence porteuse f_o (fig. 10b).

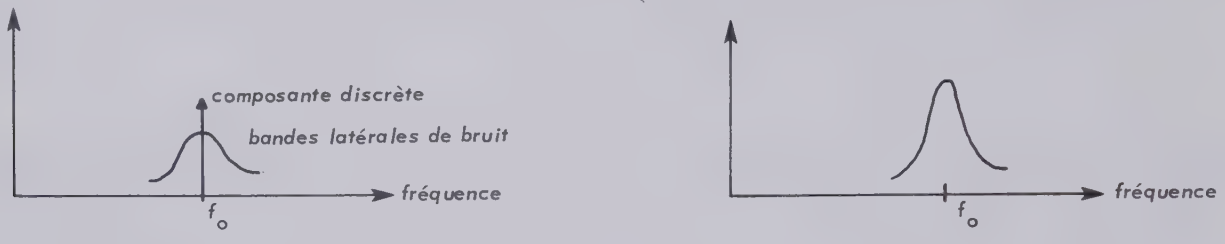


Fig. 10 - Spectres de radio-fréquences : a. $\Phi(t)$: processus stationnaire — b. $\Phi(t)$: processus de diffusion.

II,2. Caractérisations d'un signal quasi-sinusoïdal

Les paramètres caractérisant la qualité d'un signal quasi-sinusoïdal sont relatifs, soit à l'instabilité de fréquence, soit à la pureté spectrale qui sont en fait deux manifestations d'une même réalité physique (la présence des sources de bruit).

II,2.1. Instabilité de fréquence

La stabilité de la fréquence émise par un générateur est une qualité fondamentale dans de nombreuses applications.

Des paramètres précis existent pour caractériser cette stabilité, ou plus précisément cette instabilité. Des concepts classiques de la théorie des variables et des processus aléatoires seront utilisés à cet effet (écart-type, variance, autocorrélation, densité spectrale de puissance [20]).

II,2.1.1. Caractérisation dans le domaine temps

L'instabilité de fréquence (relative) pendant une durée τ est caractérisée par le paramètre sans dimension [16, 19] :

(4) $$I(\tau) = \frac{\sigma\left[\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau}\right]}{\omega_o}$$

Le numérateur représente l'écart-type (moyenne d'ensemble calculée théoriquement à partir d'un nombre infini d'oscillateur pendant l'intervalle (t , $t+\tau$) ; voir fig. 11) de la variable aléatoire :

(5) $$\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \dot{\phi}(\theta)\, d\theta$$

t et τ sont fixes pour le calcul de l'écart-type : $\dot{\phi}(t)$ change d'un échantillon de la variable aléatoire $\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau}$ à l'autre. L'écart-type ne dépend que de la durée d'intégration τ , du fait de la stationnarité de $\dot{\phi}(t)$ (démonstration au paragraphe II,2.1.3).

La signification du paramètre $I(\tau)$ est plus évidente en remarquant que $\omega(t) = \omega_o + \dot{\phi}(t)$, où $\dot{\phi}(t)$ est stationnaire de moyenne nulle, entraîne :

(6) $$\sigma\left[\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau}\right] = \sigma\left[\langle \omega(t') \rangle_{t,\tau}\right]$$

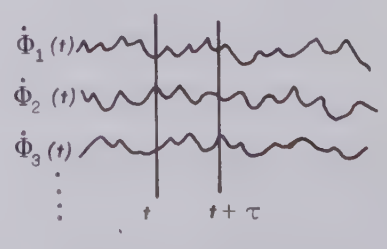


Fig. 11 - Détermination de $I(\tau)$ par une moyenne d'ensemble.

qui est l'écart-type d'une infinité de mesures de la fréquence (angulaire), toutes effectuées pendant une durée τ à l'instant t ; le numérateur de $I(\tau)$ est l'écart-type de la densité de probabilité de la variable aléatoire $\langle \omega(t') \rangle_{t,\tau}$

Le paramètre $I(\tau)$ est défini sans ambiguïté lorsque les fluctuations de fréquence sont stationnaires.

VALEURS ASYMPTOTIQUES

La définition même de $I(\tau)$ entraîne que $\lim_{\tau \to 0} I(\tau)$ est finie :

$$\lim_{\tau \to 0} \langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau} = \dot{\phi}(t)$$

$$\lim_{\tau \to 0} \sigma \left[\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau} \right] = \sigma \left[\dot{\phi}(t) \right] = \sqrt{\overline{\dot{\phi}^2(t)}} \tag{7}$$

$$\boxed{\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = \frac{\sqrt{\overline{\dot{\phi}^2(t)}}}{\omega_0}} \tag{8}$$

Or, le carré-moyen des fluctuations de fréquence est fini pour tous les processus aléatoires physiquement réalistes (puissance finie).

La stationnarité de $\dot{\phi}(t)$ se traduit par $\lim_{\tau \to \infty} I(\tau) = 0$, dont la signification intuitive est claire : plus on dispose d'une longue durée pour effectuer chaque mesure de fréquence, mieux se fait la compensation dans l'opération de moyenne $\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau}$; à la limite τ infini, chaque mesure fournirait la valeur constante ω_0.

L'allure de la fonction $I(\tau)$ est représentée sur la figure 12.

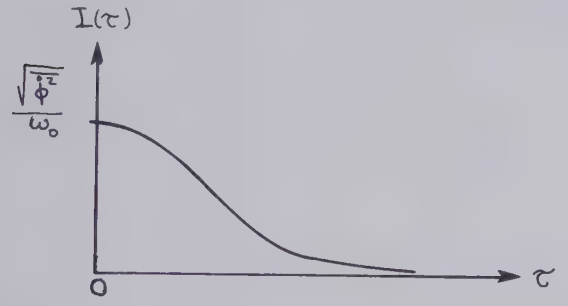


Fig. 12 - Instabilité relative de fréquence dans le domaine temps.

Quelques remarques concernant $I(\tau)$ s'imposent ici :

a) $I(\tau)$ est un paramètre fondamental lors de l'étude *théorique* de modèles stationnaires d'oscillateurs. Du point de vue expérimental, on ne peut faire que des *estimations* de $I(\tau)$ étudiées très en détail au chapitre VIII. Une technique expérimentale permettant cette estimation sera décrite et analysée au chapitre IX.

b) La description de l'instabilité de fréquence en fonction d'une durée d'intégration τ , conduit aux notions de stabilité à *court, moyen* et *long termes*. Une valeur numérique précise de la frontière entre ces domaines ne saurait être définie de manière unique pour tous les générateurs. Dans la pratique, les durées pendant lesquelles les effets des bruits aléatoires stationnaires sont prédominants appartiennent au court terme (typiquement : $\tau < 1$ ou quelques secondes) ; les durées pendant lesquelles les effets des variations systématiques (dérives) prédominent, appartiennent au domaine du long terme (jours, mois, années selon la qualité du générateur).

c) Un modèle théorique d'oscillateur stationnaire donnant $\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = \infty$ est en contradiction avec la définition de $I(\tau)$, et est inadéquat pour décrire l'instabilité à très court terme ($\tau \to 0$). Cela nous conduira, au chapitre V, à reprendre en la complétant l'analyse des effets du bruit thermique interne des oscillateurs.

II,2.1.2. Caractérisation dans le domaine fréquence

L'instabilité de la fréquence émise est caractérisée dans le domaine fréquence par la densité spectrale de puissance $S_{\dot{\phi}}(f)$ du processus aléatoire $\dot{\phi}(t)$ [16, 19].

La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation [20] :

$$R_{\dot{\phi}}(\tau) = \overline{\dot{\phi}(t)\, \dot{\phi}(t-\tau)} \qquad \text{(moyenne du produit)} \tag{9}$$

(10) $$S_{\dot\phi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\dot\phi}(\tau)\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau \qquad (f \geq 0)$$

$S_{\dot\phi}(f)$ est une fonction réelle, paire, positive, telle que :

(11) $$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot\phi}(f)\, df = \overline{\dot\phi^2(t)} = R_{\dot\phi}(0)$$

La densité spectrale « physique » à fréquences uniquement positives s'obtient en multipliant par deux l'expression de $S_{\dot\phi}(f)$ pour f positif, avec $S_{\dot\phi}(f) = 0$ pour f négatif :

(12) $$S_{\dot\phi_{Physique}}(f) = 4 \int_{0}^{+\infty} R_{\dot\phi}(\tau) \cos 2\pi f\tau\, d\tau \qquad (f \geq 0)$$

Des fluctuations de phase stationnaires sont également caractérisables par :

(13) $$S_{\phi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\phi}(\tau)\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau \qquad (f \geq 0)$$

REMARQUES :

a) $S_\phi(f)$ s'exprime en radian ^{2}/Hz, et $S_{\dot\phi}(f)$ en (rd/s)^2/Hz. Ce ne sont donc pas de vraies densités spectrales de « puissance » (Watt/Hz).

b) On peut introduire la variable réduite $y(t) = \dot\phi(t)/\omega_o$ (qui possède l'avantage d'être invariante par multiplication de fréquence) et définir [45].

$$S_y(f) = \frac{S_{\dot\phi}(f)}{\omega_o^2}$$

c) Il faut prendre garde de ne pas confondre la fréquence instantanée du signal $f(t) = f_o + \dot\varphi(t)$ et les fréquences de Fourier f apparaissant dans $S_{\dot\phi}(f)$ ou $S_\phi(f)$.

d) Dans les analyses théoriques, il est souvent plus commode de considérer les spectres à fréquences négatives et positives. Du point de vue des mesures, il est plus commode de considérer les spectres à fréquences uniquement positives.

II,2.1.3. Relations entre ces caractérisations

Des relations classiques existent entre $I(\tau)$, $S_\phi(f)$ et $S_{\dot\phi}(f)$.

- **Relation entre $S_\phi(f)$ et $S_{\dot\phi}(f)$**

La densité spectrale de puissance $S_\phi(f)$ d'un processus aléatoire $\phi(t)$ est reliée à la densité spectrale de puissance $S_{\dot\phi}(f)$ du processus $\dot\phi(t) = d\phi(t)/dt$, par l'expression classique :

(14) $$S_{\dot\phi}(f) = 4\pi^2 f^2\, S_\phi(f)$$

Elle s'obtient en utilisant le théorème suivant [20] : la densité spectrale de puissance $S_y(\omega)$ du signal de sortie $y(t)$ d'un système linéaire dont le gain complexe est $H(i\omega)$, est donnée par :

$S_y(\omega) = |H(i\omega)|^2\, S_x(\omega)$, où $S_x(\omega)$ est la densité spectrale du signal d'entrée ($\omega = 2\pi f$).

Le système linéaire fournissant en sortie la dérivée du signal d'entrée est caractérisé (fig. 13) par $H(i\omega) = i\omega$, soit : $|H(i\omega)|^2 = 4\pi^2 f^2$

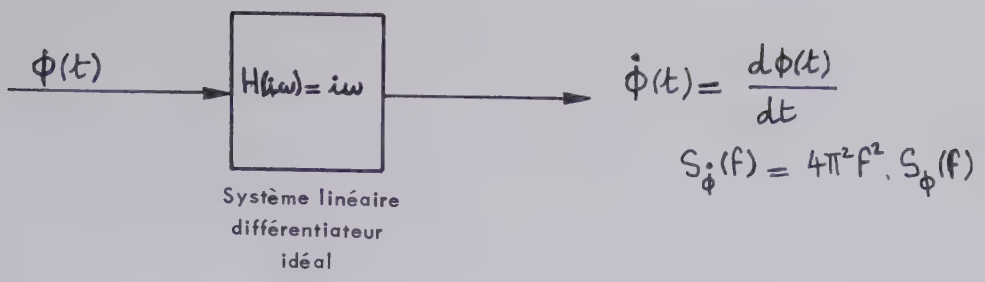


Fig. 13 - Système linéaire différentiateur

• Relation entre $I(\tau)$ et $S_{\dot\phi}(f)$

La démonstration présentée ici a l'avantage (contrairement à celle de la référence 16), de ne pas faire appel à la stationnarité des fluctuations de phase. La stationnarité de $\dot\phi(t)$ suffit, $\phi(t)$ pouvant être soit stationnaire, soit à diffusion.

Cette remarque justifie l'utilisation de la relation entre $I(\tau)$ et $S_{\dot\phi}(f)$ lors de l'étude du bruit thermique interne.

La variance* de la variable aléatoire $\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}$, où $\dot\phi(t)$ est un processus aléatoire stationnaire de moyenne nulle, s'écrit :

$$\sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right] = E\left[\langle\dot\phi\rangle^2_{t,\tau}\right] - \left(E\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right]\right)^2$$

$$\begin{cases} E\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right] = 0 \\ E\left[\langle\dot\phi\rangle^2_{t,\tau}\right] = \dfrac{1}{\tau^2}\displaystyle\int_t^{t+\tau}\int_t^{t+\tau} E\left[\dot\phi(\theta_1)\,\dot\phi(\theta_2)\right] d\theta_1\, d\theta_2 \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{\tau^2}\displaystyle\int_t^{t+\tau}\int_t^{t+\tau} R_{\dot\phi}(\theta_1-\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 \end{cases}$$

où $R_{\dot\phi}(\theta_1-\theta_2)$ ne dépend que de la différence $\theta_1-\theta_2$ du fait de la stationnarité.

$$\sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right] = \frac{1}{\tau^2}\int_t^{t+\tau}\int_t^{t+\tau} R_{\dot\phi}(\theta_1-\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 \qquad (15)$$

La forme fonctionnelle de cette expression permet de montrer que $\sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right]$ ne dépend que de τ (et non pas de t).

Remplaçons $R_{\dot\phi}$ par son expression de fonction de $S_{\dot\phi}$:

$$R_{\dot\phi}(\theta_1-\theta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot\phi}(f)\cos 2\pi(\theta_1-\theta_2)f\, df$$

En inversant les intégrations sur f et θ :

$$\sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right] = \frac{1}{\tau^2}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot\phi}(f)\left[\int_t^{t+\tau}\int_t^{t+\tau}\cos 2\pi(\theta_1-\theta_2)f\, d\theta_1\, d\theta_2\right] df$$

---

* $E[x]$ *désigne l'espérance mathématique (moyenne d'ensemble) de la variable aléatoire* x *; c'est un opérateur linéaire .*

avec : $\int_{t}^{t+\tau}\int_{t}^{t+\tau} \cos 2\pi(\theta_1-\theta_2)f \; d\theta_1 \, d\theta_2 = \frac{\sin^2 \pi\tau f}{\pi^2 f^2}$ (t a disparu du résultat)

d'où

(16) $$\boxed{\sigma^2[\langle\dot{\phi}\rangle_{t,\tau}] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) \left(\frac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f}\right)^2 df}$$

L'instabilité de fréquence relative dans le domaine temps s'exprime donc en fonction de $S_{\dot{\phi}}(f)$:

(17) $$\boxed{I(\tau) = \frac{1}{\omega_0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) \left(\frac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f}\right)^2 df \right)^{1/2}}$$

En théorie, les paramètres $S_{\dot{\phi}}(f)$ et $I(\tau)$ sont équivalents du point de vue informationnel ; néanmoins, cette relation n'étant généralement pas inversible, il est recommandé de déterminer théoriquement $S_{\dot{\phi}}(f)$ plutôt que $I(\tau)$.

II,2.2. Pureté spectrale du signal

Les paramètres $I(\tau)$, $S_\phi(f)$ et $S_{\dot{\phi}}(f)$ ne caractérisent que les fluctuations de fréquence (ou de phase) du signal. En vue de certaines utilisations de l'oscillateur, une caractérisation dans le domaine fréquence du signal complet $v(t)$ est indispensable. Cela est particulièrement vrai dans le domaine de l'instrumentation physique.

II,2.2.1. Définition du spectre de radio-fréquence [16]

La densité spectrale de puissance $S_v(f)$ du signal $v(t)$, représente la distribution de sa puissance en fonction de la fréquence :

(18) $$S_v(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau)\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau \qquad (f \geq 0)$$

$S_v(f)$ est réel, pair, positif et possède deux parties centrées respectivement sur les fréquences $-f_o$ et $+f_o$; les bandes latérales résultent de l'existence des fluctuations de phase et d'amplitude (fig. 10).

$S_v(f)$ s'exprime en Watt/Hz ($v(t)$ appliqué aux bornes d'une résistance idéale de 1Ω) ; il est dénommé :

- spectre de radiofréquences (R.F.) lorsque $v(t)$ est issu d'un oscillateur radio-électrique (quartz, maser,...) ;
- spectre optique lorsque $v(t)$ est issu d'un laser.

Le spectre R.F. est généralement un paramètre fondamental dans les applications où le signal de l'oscillateur est utilisé pour étudier un phénomène physique, par exemple en résonance magnétique où toute puissance hors de la fréquence porteuse crée un bruit au niveau du récepteur (voir chapitre XI).

II,2.2.2. Concept de pureté spectrale

La pureté spectrale est un concept visant à qualifier la qualité du signal complet dans le domaine fréquence.

La pureté spectrale idéale correspond à une raie de largeur nulle centrée sur la fréquence f_o :

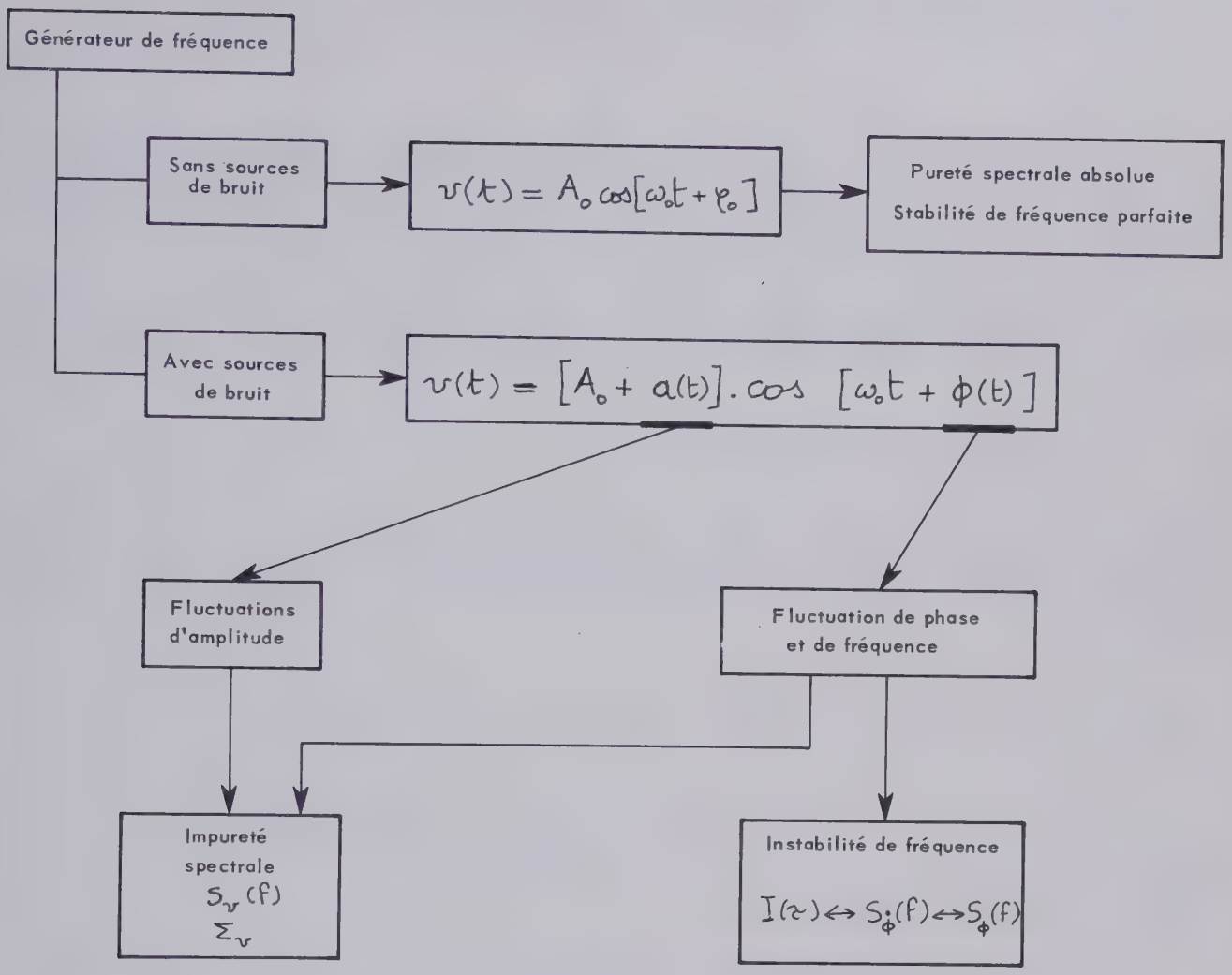
(19) $$S_v(f) = \frac{A_o^2}{2} \cdot \delta(f - f_o)$$

(δ est la distribution de Dirac).

Tout paramètre permettant de caractériser l'écart entre le spectre réel et ce spectre idéal, constitue une estimation de la qualité de la pureté spectrale.

De tels paramètres sont : la largeur à mi-hauteur du spectre ; le second moment du spectre ; la puissance présente dans les bandes latérales de bruit ; le niveau des bandes latérales de bruit en-dessous de la porteuse, etc...

TABLEAU I - CARACTÉRISATION D'UN SIGNAL



Chapitre III
RELATIONS GÉNÉRALES ENTRE INSTABILITÉ DE FRÉQUENCE ET PURETÉ SPECTRALE

Lorsque les fluctuations de fréquence et de phase sont représentables par des processus aléatoires gaussiens, ce qui est le cas pour de nombreux types de bruit physique (théorème de la limite centrale), des relations mathématiques exactes peuvent être établies* entre les paramètres caractéristiques de l'aspect instabilité de fréquence et ceux caractéristiques de l'aspect pureté spectrale.

De telles relations permettent d'effectuer aisément l'étude théorique complète d'un oscillateur perturbé par une source de bruit (voir chapitre V), de ne pas exiger d'un générateur de fréquence des performances contradictoires dans les deux domaines, et donnent en outre une vision synthétique de la caractérisation des générateurs.

III,1. Relation générale entre $S_v(f)$ et $I(\tau)$

Le point de départ de l'établissement des relations générales entre instabilité de fréquence et pureté spectrale, sera la démonstration d'une relation permettant de calculer exactement le spectre de radiofréquences $S_v(f)$, connaissant l'instabilité dans le domaine temps $I(\tau)$ pour tout $\tau \geq 0$, dans l'hypothèse où les fluctuations de phase et de fréquence sont gaussiennes (on néglige dans ce paragraphe les fluctuations d'amplitude).

III,1.1. Calcul de la relation

Il est commode pour ce calcul d'utiliser le signal complexe $z(t)$ associé à $v(t)$:

$$z(t) = A_0 \cdot \exp i\left[\omega_0 t + \int_0^t \dot{\phi}(\theta)\, d\theta\right] \tag{20}$$

$\dot{\phi}(t)$ est aléatoire, *stationnaire*, gaussien.

$\int_0^t \dot{\phi}(\theta)\, d\theta$ est *soit stationnaire, soit à diffusion* selon les variations de $S_{\dot{\phi}}(f)$ pour $f \to 0$ [17].

($\dot{\phi}(t)$ étant à variations lentes par rapport à $\cos\omega_0 t$, $z(t)$ est approximativement le signal analytique $v_A(t)$ associé à $v(t)$: $v_A(t) = v(t) + i$ (Transformée de Hilbert de $v(t)$)).

Considérons :

$$z(t)\, z^*(t-\tau) = A_0^2\, e^{i\omega_0\tau}\, e^{i\,\Delta\phi(t,\tau)}$$

où

$$\Delta\phi(t,\tau) = \int_{t-\tau}^{t} \dot{\phi}(\theta)\, d\theta = \tau\, \langle\dot{\phi}\rangle_{t,\tau}$$

$$R_z(\tau) = E\left[z(t)\, z^*(t-\tau)\right] = A_0^2\, e^{i\omega_0\tau}\, E\left[e^{i\tau\langle\dot{\phi}\rangle_{t,\tau}}\right] \tag{21}$$

---

* *L'analyse développée dans ce chapitre diffère profondément de celle présentée en Thèse 3e Cycle, et possède l'avantage de mieux mettre en évidence les conditions de validité de chaque relation établie.*

Le passage de $\dot{\phi}(t)$ à $\Delta\phi(t,\tau)$ se fait par une relation de filtrage linéaire dans un filtre intégrateur parfait : $\Delta\phi(t,\tau)$ est donc une variable aléatoire gaussienne, et par suite, obéit à la relation :

$$E[e^{ix}] = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2[x]} \tag{22}$$

(x : variable aléatoire gaussienne)

soit

$$E[e^{i\tau\langle\dot{\phi}\rangle_{t,\tau}}] = e^{-\frac{1}{2}\tau^2\sigma^2[\langle\dot{\phi}\rangle_{t,\tau}]} = e^{-\frac{\omega_o^2}{2}\tau^2 I^2(\tau)} \tag{23}$$

La fonction d'autocorrélation du signal réel $v(t)$ a pour expression :

$$R_v(\tau) = \frac{1}{2} \times \left(\text{Partie réelle de } R_{\mathfrak{z}}(\tau) \right)$$

$$\boxed{R_v(\tau) = \frac{A_o^2}{2} \cdot \cos 2\pi f_o \tau \cdot e^{-\frac{\omega_o^2}{2}\tau^2 I^2(\tau)}} \tag{24}$$

Sa transformée de Fourier donne le spectre de radio-fréquences du signal en fonction de $I(\tau)$:

$$\boxed{S_v(f) = \frac{A_o^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega_o^2}{2}\tau^2 I^2(\tau)} \cdot \cos 2\pi f_o \tau \cdot e^{-i2\pi f\tau} \, d\tau} \quad (f \gtrless 0) \tag{25}$$

(le terme $\cos 2\pi f_o \tau$ translate le spectre autour de la fréquence porteuse).

Il faut noter la nature très différente de $S_v(f)$ et $I(\tau)$: $S_v(f)$ est un paramètre spectral défini pour un signal de durée infinie ; $I(\tau)$ est l'écart-type d'une infinité de mesures de la fréquence, chacune étant effectuée pendant une durée fini τ.

Cette importante relation entre $S_v(f)$ et $I(\tau)$ sera utilisée au chapitre V pour l'étude des bruits thermiques additifs qui créent des fluctuations de fréquence et de phase gaussiennes ; elle se révèlera particulièrement fructueuse dans la théorie généralisée du bruit thermique interne où le calcul direct du spectre R.F. serait extrêmement difficile, sinon impossible.

REMARQUE : C'est le paramètre $\tau I(\tau)$, et non $I(\tau)$ seul, qui intervient dans la relation (25) ; l'interprétation de $\tau I(\tau)$ en relation avec la caractérisation de l'instabilité de fréquence sera étudiée au paragraphe VII,2.

III,1.2. Exemple d'application

L'analyse classique du bruit thermique interne donne (voir paragraphe IV,1) :

$$I(\tau) = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{kT}{2P\tau}}$$

Le report de cette expression dans l'équation (25) donne :

$$S_v(f) = \frac{A_o^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\tau|} \cos 2\pi f_o \tau \; e^{-i2\pi f\tau} \, d\tau$$

$$\left(\alpha = \frac{\omega_o^2 kT}{4PQ^2} \right)$$

D'où le spectre à fréquences positives :

$$S_v(f) = \frac{A_o^2}{2} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 (f - f_o)^2}$$

La largeur à mi-hauteur de ce spectre est le résultat fourni par la théorie non-linéaire du bruit dans les oscillateurs [26] :

$$\boxed{\Delta f_{1/2} = \frac{\pi k T f_o^2}{P Q^2}}$$

III,2. Relation générale entre $S_v(f)$ et $S_\phi(f)$

Lorsque $\phi(t)$ est un processus gaussien et stationnaire, la relation entre $S_v(f)$ et $I(\tau)$ peut prendre la forme d'une relation exacte entre $S_v(f)$ et $S_\phi(f)$.

III,2.1. Calcul de la relation

L'introduction de l'autocorrélation $R_\phi(\tau)$ de la phase permet d'écrire :

$$(26) \qquad \tau^2 \sigma^2 [\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau}] = \sigma^2 [\Delta\phi(t,\tau)] = 2 [R_\phi(0) - R_\phi(\tau)]$$

soit :

$$S_v(f) = \frac{A_o^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[R_\phi(0) - R_\phi(\tau)]} \cdot \cos 2\pi f_o \tau \cdot e^{-i2\pi f\tau} \, d\tau$$

$$(27) \qquad S_v(f) = \frac{A_o^2}{2} e^{-R_\phi(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{R_\phi(\tau)} \cos 2\pi f_o \tau \; e^{-i2\pi f\tau} \, d\tau$$

En développant $e^{R_\phi(\tau)}$ en série (convergence uniforme $\forall \tau$), on peut écrire :

$$(28) \qquad S_v(f) = \frac{A_o^2}{2} e^{-R_\phi(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} R_\phi^n(\tau) \cos 2\pi f_o \tau \; e^{-i2\pi f\tau} \, d\tau$$

Le théorème de convolution [21] donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_\phi^n(\tau) \; e^{-i2\pi f\tau} \, d\tau = S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \quad \equiv n-1 \text{ produits de convolution*}$$

de $S_\phi(f)$ par lui-même.

Par convention :

$$\begin{cases} S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) = S_\phi(f) & \text{pour} \quad n = 1 \\ S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) = \delta(f) & \text{pour} \quad n = 0 \end{cases}$$

---

* *Par définition :* $S_\phi(f) \otimes S_\phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(y) \, S_\phi(f-y) \, dy$

Le terme $\cos 2\pi f_o \tau$ entraîne une translation des produits de convolution autour des fréquences $-f_o$ et $+f_o$. Si l'on ne garde que la partie centrée sur $+f_o$ en la multipliant par deux pour conserver la même aire totale, le spectre R.F. s'écrit :

$$(29) \quad S_v(f) = \frac{A_o^2}{2} e^{-R_\phi(0)} \left\{ \delta(f-f_o) + S_\phi(f-f_o) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \right]_{f_o} \right\}$$

(Le crochet représente $n-1$ produits de convolution de $S_\phi(f)$ par lui-même, translatés autour de la fréquence porteuse $+f_o$. La valeur $R_\phi(0)$ est finie pour un processus aléatoire stationnaire $\phi(t)$, et

$$R_\phi(0) = \overline{\phi^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f)\, df \quad)$$

Cette expression constitue la relation exacte entre le spectre R.F. et l'instabilité de fréquence dans le domaine fréquence lorsque le bruit de phase est un processus aléatoire gaussien stationnaire ; la caractéristique fondamentale de ce spectre de radiofréquences est la présence d'un terme discret à la fréquence porteuse dont l'aire a pour valeur $\frac{A_o^2}{2} e^{-\overline{\phi^2}}$ (voir fig. 10a).

III,2.2. Propriétés du spectre R.F.

L'expression (29) est la densité spectrale de puissance d'un signal quasi-sinusoïdal modulé uniquement en phase (ou fréquence). La puissance totale de l'onde modulée est donc égale à la puissance de l'onde non modulée $A_o \cos \omega_o t$, ce que l'on vérifie en intégrant $S_v(f)$.

• Calcul de l'aire sous $S_v(f)$

L'intégration est effectuée de $-\infty$ à $+\infty$, pour tenir compte de la «queue» du spectre dans la zone des fréquences négatives ; en notant :

$$S \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f-f_o)\, df = \overline{\phi^2(t)} = R_\phi(0) \quad \text{, il vient}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \right]_{f_o} df = S^n$$

soit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_v(f)\, df = \frac{A_o^2}{2} e^{-\overline{\phi^2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f-f_o)\, df + \int_{-\infty}^{\infty} S_\phi(f-f_o)\, df + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \right]_{f_o} df \right]$$

$$= \frac{A_o^2}{2} e^{-\overline{\phi^2}} \left[1 + \overline{\phi^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\overline{\phi^2} \right)^n \right]$$

$$(30) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} S_v(f)\, df = \frac{A_o^2}{2}$$

La puissance du bruit apparaissant dans les bandes latérales est ainsi prise à la puissance porteuse, la puissance totale restant égale à celle de l'onde non modulée.

• Largeur de raie de $S_v(f)$

Divers paramètres sont susceptibles de caractériser l'étalement d'une densité spectrale autour de sa fréquence centrale : largeur à mi-hauteur, largeur du spectre rectangle de même surface, second moment du spectre (divisé par l'aire sous le spectre), etc...

Le choix du paramètre le plus adéquat est souvent imposé par la commodité de son calcul. L'expression (29) de $S_\nu(f)$ nous conduit à calculer :

(31)
$$\boxed{\Sigma_\nu = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_0)^2 \, S_\nu(f) \, df}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_\nu(f) \, df} \right)^{1/2}}$$

$$\Sigma_\nu^2 = e^{-\overline{\phi^2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_0)^2 \, S_\phi(f-f_0) \, df + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_0)^2 \left[S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \right]_{f_0} df \right]$$

avec (cf. Annexe n° 1) :

(32)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_0)^2 \left[S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \right]_{f_0} df = n \left(\overline{\phi^2}\right)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_0)^2 \, S_\phi(f-f_0) \, df$$

$$\Sigma_\nu^2 = e^{-\overline{\phi^2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2 S_\phi(f) \, df \right) \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\overline{\phi^2}\right)^{n-1}}{(n-1)!} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_\phi(f) \, df$$

soit

(33)
$$\boxed{\Sigma_\nu = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \, S_\phi(f) \, df \right)^{1/2}}$$

Cette relation constitue un autre aspect des liens entre instabilité de fréquence et pureté spectrale ; elle peut s'écrire sous deux autres formes différentes :

(34)
$$\boxed{\Sigma_\nu = \sigma_\phi \sqrt{\overline{\phi^2(t)}}}$$

(avec, par définition : $\sigma_\phi^2 = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_\phi(f) \, df}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f) \, df}$)

(35)
$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\overline{\dot\phi^2(t)}}}$$

$$\left(\text{car } \sigma_\phi^2 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot\phi}(f) \, df}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f) \, df} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\overline{\dot\phi^2(t)}}{\overline{\phi^2(t)}} \right) .$$

La dispersion Σ_ν du spectre de radio-fréquences est égale à l'écart-type des fluctuations de fréquence $\dot\varphi(t) = \dot\phi(t)/2\pi$; cette relation est particulièrement intéressante car elle est valide dans le cas de la diffusion de phase.

III,2.3. Etude de cas particuliers

Lorsque $S_\phi(f)$ possède une forme analytique simple, les produits de convolution multiples peuvent être calculés rigoureusement. Les résultats relatifs à deux modèles simples susceptibles d'être utilisés pour l'étude du bruit thermique externe additif sont présentés.

III,2.3.1. Modèle : $S_\phi(f)$ courbe de Gauss

Lorsque : $S_\phi(f) = \frac{S}{\sigma_\phi \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{f^2}{2\sigma_\phi^2}}$, on démontre aisément que :

$$S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) = \frac{S^n}{\sigma_\phi \sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{f^2}{2n\sigma_\phi^2}} \qquad (S = \overline{\phi^2})$$

Le spectre de radiofréquences s'écrit alors :

(36) $$S_{v_{Gauss}}(f) = \frac{A_o^2}{2} e^{-\overline{\phi^2}} \left\{ \delta(f-f_o) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{S^n}{\sigma_\phi \sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(f-f_o)^2}{2n\sigma_\phi^2}} \right\}$$

(le terme $n = 1$ correspond à $S_\phi(f-f_o)$).

III,2.3.2. Modèle : $S_\phi(f)$ blanc passe-bas

Lorsque

$$\begin{cases} S_\phi(f) = k & \text{pour} \quad |f| < f_M \\ S_\phi(f) = 0 & \text{pour} \quad |f| > f_M \end{cases}$$

il est possible d'établir l'expression rigoureuse :

(37) $$S_{v_{B.P.B.}}(f) = \frac{A_o^2}{2} e^{-\overline{\phi^2}} \left\{ \delta(f-f_o) + \frac{1}{2\pi f_M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_\phi^n(0)}{n!} I_n\left(\frac{f-f_o}{f_M}\right) \right\}$$

où $$I_n(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n e^{-iux} \, dx$$

est une fonction continue de u pour $n \geq 2$ [22].

REMARQUE :

Lorsque $S_\phi(f)$ est une courbe de Lorentz, le calcul exact de $S_v(f)$ est possible. Toutefois, un processus aléatoire dont le spectre est lorentzien ne possède pas de dérivée stationnaire [20]. Un tel modèle de spectre de phase conduit donc à un signal dont on ne peut pas définir valablement la fréquence instantanée, et n'est donc pas intéressant pour l'étude d'un étalon de fréquence à fluctuations de fréquence stationnaires.

III,2.4. Approximation du faible indice de modulation

Une approximation de l'expression exacte (29) entre $S_v(f)$ et $S_\phi(f)$ est souvent citée dans la littérature sur le bruit dans les oscillateurs [16, 19]. Il s'agit de l'approximation dite du «faible indice de modulation», établie en supposant $\overline{\phi^2(t)} \ll 1$ rd^2 :

(38)
$$S_v(f) \simeq \frac{A_o^2}{2}\left\{ \delta(f-f_o) + S_\phi(f-f_o) \right\}$$

Le spectre de radiofréquences se réduit à la porteuse (même aire que pour le signal non modulé) et au spectre des fluctuations de phase translaté autour de la fréquence porteuse. Cette approximation est à l'origine d'une confusion courante entre $S_v(f)$ et $S_\phi(f)$ (ces deux spectres ne s'expriment pas dans les mêmes unités). Cette approximation est inexacte en ce qui concerne la puissance totale de l'onde modulée en phase qui est supérieure à celle de l'onde non modulée. Elle est enfin inapplicable au cas de la diffusion de la phase où le spectre R.F. ne possède pas de composante discrète à la fréquence porteuse.

III,3. Démonstration directe de la relation générale entre $S_v(f)$ et $S_\phi(f)$

Lorsque $\phi(t)$ est gaussien stationnaire, une démonstration directe (sans passer par l'intermédiaire de la relation $S_v(f) \leftrightarrow \Gamma(\tau)$) est possible*. Nous en rappelons ici les grandes lignes en traitant également le cas où existe un bruit d'amplitude.

III,3.1. Sans fluctuations d'amplitude

La fonction d'autocorrélation du signal $v(t) = A_o \cos[\omega_o t + \phi(t)]$ s'écrit :

$$R_v(\tau) = \overline{v(t).v(t+\tau)} = A_o^2 \; \overline{\cos[\omega_o t + \phi(t)].\cos[\omega_o(t+\tau) + \phi(t+\tau)]}$$

$$= \frac{A_o^2}{2}\cos\omega_o\tau \left[\overline{\cos\phi(t+\tau).\cos\phi(t)} + \overline{\sin\phi(t+\tau).\sin\phi(t)} \right]$$

(39)
$$= \frac{A_o^2}{2}\cos\omega_o\tau \left[\sum_{m=o}^{\infty}\sum_{j=o}^{\infty} \frac{(-1)^{m+j}}{(2m)!\,(2j)!} \overline{\phi^{2m}(t)\,\phi^{2j}(t+\tau)} \right.$$

$$\left. + \sum_{p=o}^{\infty}\sum_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^{p+k}}{(2p+1)!\,(2k+1)!} \overline{\phi^{2p+1}(t).\phi^{2k+1}(t+\tau)} \right]$$

(40)
$$S_v(f) = \frac{A_o^2}{2}\left[\sum_{m=o}^{\infty}\sum_{j=o}^{\infty} \frac{(-1)^{m+j}}{(2m)!\,(2j)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\phi^{2m}(t)\,\phi^{2j}(t+\tau)}.\cos 2\pi f_o\tau\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau \right.$$

$$\left. + \sum_{p=o}^{\infty}\sum_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^{p+k}}{(2p+1)!\,(2k+1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\phi^{2p+1}(t)\,\phi^{2k+1}(t+\tau)}\cos 2\pi f_o\tau\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau \right]$$

Cette expression du spectre R.F. ne nécessite aucune hypothèse sur les propriétés statistiques de $\phi(t)$; son calcul nécessite la connaissance de tous les moments :

$$\overline{\phi_1^{2m}\,\phi_2^{2j}} \quad \text{et} \quad \overline{\phi_1^{2p+1}\,\phi_2^{2k+1}} \qquad (\phi_1 = \phi(t) \; ; \; \phi_2 = \phi(t+\tau))$$

* *Cf. Thèse de 3e cycle.*

Dans le cas particulier (mais cependant fondamental pour l'étude des bruits physiques) où $\phi(t)$ est gaussien, ces moments ont pour expression :

$$(41)\quad \begin{cases} \overline{\Phi_1^{2m}\,\Phi_2^{2j}} = \dfrac{(2R_\phi(0))^{m+j}}{\pi}\,\Gamma(m+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(j+\tfrac{1}{2})\,{}_2F_1\left(-m,-j;\tfrac{1}{2};\rho^2(\tau)\right) \\ \overline{\Phi_1^{2p+1}\,\Phi_2^{2k+1}} = \dfrac{2(2R_\phi(0))^{p+k+1}}{\pi}\,\Gamma(p+\tfrac{3}{2})\,\Gamma(k+\tfrac{3}{2})\,\rho(\tau)\,{}_2F_1\left(-p,-k;\tfrac{3}{2};\rho^2(\tau)\right) \end{cases}$$

[m, j, k, p entiers ≥ 0 ; $\rho(\tau) = R_\phi(\tau)/R_\phi(0)$; Γ est la fonction factorielle, et ${}_2F_1$ la fonction hypergéométrique gaussienne définie par la série :

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_u\,(\beta)_u}{(\gamma)_u}\cdot\frac{x^u}{u!} \qquad |x|<1$$

avec : $(\alpha)_u = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+u-1)$ et $(\alpha)_0 = 1$].

Le report des expressions (41) dans l'équation (40) donne, après simplifications :

$$(42)\quad S_v(f) = \frac{A_0^2}{2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+j}}{m!\,j!}\left(\frac{R_\phi(0)}{2}\right)^{m+j} J_1^{(m,j)}(f) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p+k}}{p!\,k!}\,2\left(\frac{R_\phi(0)}{2}\right)^{p+k+1} J_2^{(p,k)}(f)\right]$$

avec :

$$(43)\quad \begin{cases} J_1^{(m,j)}(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} {}_2F_1\left(-m,-j;\tfrac{1}{2};\rho^2(\tau)\right)\cdot\cos 2\pi f_0\tau\cdot e^{-i2\pi f\tau}\cdot d\tau \\ J_2^{(p,k)}(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau)\cdot{}_2F_1\left(-p,-k;\tfrac{3}{2};\rho^2(\tau)\right)\cdot\cos 2\pi f_0\tau\cdot e^{-i2\pi f\tau}\,d\tau \end{cases}$$

$$(44)\quad \begin{cases} J_1^{(m,j)}(f) = \displaystyle\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(-m)_u(-j)_u}{(1/2)_u}\cdot\frac{1}{u!}\cdot\frac{1}{2R_\phi^{2u}(0)}\left[\left[S_\phi(f)\overset{2u-1}{\otimes}S_\phi(f)\right]_{-f_0} + \left[S_\phi(f)\overset{2u-1}{\otimes}S_\phi(f)\right]_{+f_0}\right] \\ \quad \text{(pour } u=0 : \quad S_\phi(f)\overset{2u-1}{\otimes}S_\phi(f) = \delta(f)\text{)} \\ J_2^{(p,k)}(f) = \displaystyle\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(-p)_u(-k)_u}{(3/2)_u}\,\frac{1}{u!}\,\frac{1}{2R_\phi^{2u+1}(0)}\left[\left[S_\phi(f)\overset{2u}{\otimes}S_\phi(f)\right]_{-f_0} + \left[S_\phi(f)\overset{2u}{\otimes}S_\phi(f)\right]_{+f_0}\right] \\ \quad \text{(pour } u=0 : \quad S_\phi(f)\overset{2u}{\otimes}S_\phi(f) = S_\phi(f)\text{)} \end{cases}$$

$$(45)\quad S_v(f) = \frac{A_0^2}{2}\left\{k_0\,\delta(f-f_0) + k_1\,S_\phi(f-f_0) + \sum_{n=2}^{\infty} k_n\left[S_\phi(f)\overset{n-1}{\otimes}S_\phi(f)\right]_{f_0}\right\}$$

Le calcul des cœfficients k_n donne :

$$k_n = \frac{1}{n!} e^{-\overline{\phi^2}} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

d'où l'expression (29) du spectre de radiofréquences.

La démonstration précédente, qui a l'avantage de mettre en évidence l'expression (40) valable quelles que soient les propriétés statistiques de $\phi(t)$, est aisément généralisable au cas où des fluctuations d'amplitude existent.

III,3.2. Avec fluctuations d'amplitude

Le calcul du spectre R.F. est effectué pour le signal

(46) $$w(t) = [\, A_o + a(t) \,] \cdot \cos [\, \omega_o t + \phi(t) \,]$$

où le processus aléatoire $a(t)$, stationnaire, de moyenne nulle, représente les fluctuations d'amplitude ayant pour autocorrélation $R_a(\tau)$ et pour densité spectrale de puissance :

(47) $$S_a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_a(\tau)\, e^{-i 2\pi f \tau}\, d\tau$$

Les processus $a(t)$ et $\phi(t)$ seront supposés non corrélés, hypothèse justifiée dans le cas des oscillateurs de haute qualité qui nous intéressent.

III,3.2.1. Calcul de la relation

L'autocorrélation du signal s'écrit :

$$\overline{w(t)\, w(t+\tau)} = \overline{[\, A_o^2 + A_o [a(t) + a(t+\tau)] + a(t).a(t+\tau) \,] \cdot \cos[\omega_o t + \phi(t)] \cdot \cos[\omega_o (t+\tau) + \phi(t+\tau)]}$$

$$= A_o^2 \; \overline{\cos[\omega_o t + \phi(t)] \cdot \cos[\omega_o (t+\tau) + \phi(t+\tau)]}$$

$$+ \overline{a(t).a(t+\tau)} \; \overline{\cos[\omega_o t + \phi(t)] \cos[\omega_o (t+\tau) + \phi(t+\tau)]}$$

$$\boxed{R_w(\tau) = \frac{A_o^2}{2} \left[1 + \frac{R_a(\tau)}{A_o^2} \right] \cos 2\pi f_o \tau \cdot \exp\left[-\left(R_\phi(0) - R_\phi(\tau) \right) \right]}$$

$A(t) = a(t) / A_o$ entraîne $R_A(\tau) = R_a(\tau) / A_o^2$

et $$S_A(f) = \frac{S_a(f)}{A_o^2}$$

soit :

(48) $$R_w(\tau) = \frac{A_o^2}{2} \cos 2\pi f_o \tau \, [\, 1 + R_A(\tau) \,] \cdot \exp\left[-\left(R_\phi(0) - R_\phi(\tau) \right) \right]$$

Le spectre R.F. de $w(t)$ s'écrit :

$$S_w(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_w(\tau)\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{A_o^2}{2} e^{-R_\phi(0)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{R_\phi(\tau)} \cos 2\pi f_o\tau\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} R_A(\tau)\, e^{R_\phi(\tau)} \cos 2\pi f_o\tau\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau \right\}$$

La première intégrale a pour expression :

$$\delta(f-f_o) + S_\phi(f-f_o) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \right]_{f_o}$$

La seconde intégrale s'obtient en utilisant le théorème de convolution :

$$F(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} R_A(\tau)\, e^{R_\phi(\tau)}\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau = S_A(f) \otimes \left\{ \delta(f) + S_\phi(f) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \right) \right\}$$

$$= S_A(f) \otimes \delta(f) + S_A(f) \otimes S_\phi(f) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[S_A(f) \otimes \left(S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \right) \right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_A(\tau)\, e^{R_\phi(\tau)} \cos 2\pi f_o\tau\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau = \frac{F(f+f_o) + F(f-f_o)}{2}$$

D'où l'expression du spectre R.F. en présence d'un bruit d'amplitude :

$$S_w(f) = \frac{A_o^2}{2} e^{-\overline{\phi^2}} \left\{ \delta(f-f_o) + S_\phi(f-f_o) + S_A(f-f_o) + \left(S_A(f) \otimes S_\phi(f) \right)_{f_o} \right.$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \right)_{f_o}$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[S_A(f) \otimes \left(S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \right) \right]_{f_o} \right\} \qquad (49)$$

III,3.2.2. Propriétés du spectre R.F.

Calcul de l'aire sous $S_w(f)$

La puissance dissipée par la tension $w(t)$ appliquée aux bornes d'une résistance idéale égale à 1 Ω, est donnée par l'aire sous la densité spectrale de puissance :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f)\, df = \frac{A_o^2}{2} \left(1 + R_A(0) \right) \qquad (50)$$

Le second terme représente la contribution du bruit d'amplitude.

Largeur de raie de $S_w(f)$

L'étalement de $S_w(f)$ autour de f_o peut être caractérisé par l'expression :

$$\Sigma_w = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_o)^2 \, S_w(f) \, df}{\int_{-\infty}^{\infty} S_w(f) \, df} \right)^{1/2} \tag{51}$$

qui permet de mettre en évidence les contributions respectives du bruit d'amplitude et du bruit de fréquence :

$$\boxed{\Sigma_w = \left(\sigma_\phi^2 \, \overline{\phi^2} + \sigma_a^2 \, \frac{\overline{a^2}}{A_o^2 + \overline{a^2}} \right)^{1/2}} \tag{52}$$

$$\text{où} \quad \sigma_a^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \, S_a(f) \, df}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_a(f) \, df}$$

Il résulte de l'indépendance statistique de $a(t)$ et $\phi(t)$, que Σ_w^2 est la somme du terme $\sigma_\phi^2 \, \overline{\phi^2}$ relatif au signal modulé uniquement en phase, et du terme $\sigma_a^2 \, \overline{a^2} / (A_o^2 + \overline{a^2})$ relatif au signal modulé uniquement en amplitude.

III,3.3. Application du théorème de la limite centrale

Les produits de convolution multiples apparaissant dans $S_v(f)$ ne peuvent pas être calculés exactement lorsque $S_\phi(f)$ ne possède pas une expression analytique simple.

Toutefois, dans de nombreux cas d'intérêt pratique, l'utilisation du théorème de la limite centrale permet l'approximation de ces produits par des gaussiennes [21]. En effet, lorsque $S_\phi(f)$ a ses valeurs suffisamment groupées autour d'une moyenne :

$$S_\phi(f)^{n-1} \otimes S_\phi(f) \simeq \frac{S^n}{\sigma_\phi \sqrt{2\pi n}} \, e^{-\frac{f^2}{2n\sigma_\phi^2}} \tag{53}$$

Cette approximation, de plus en plus exacte lorsque $n \to \infty$, fournit en fait des résultats corrects pour les faibles valeurs de n (2, 3, 4, ...) lorsque $S_\phi(f)$ possède l'allure décrite ci-dessus.

III,4. Relation entre instabilité de fréquence à très court terme et dispersion du spectre de radiofréquences

Une relation importante peut être aisément établie entre $\lim_{\tau \to 0} I(\tau)$, qui est une estimation de l'instabilité à très court terme, et Σ_v qui est une estimation de la pureté spectrale, en rapprochant les expressions :

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = \frac{\sqrt{\overline{\dot{\phi}^2}}}{\omega_o} \qquad \text{cf. éq. (8)}$$

$$\Sigma_v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\overline{\dot{\phi}^2}} \qquad \text{cf. éq. (35)}$$

Soit :

(54)
$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = \frac{\Sigma_v}{f_o}$$

Cette relation simple montre qu'une amélioration de la pureté spectrale entraînant une diminution de Σ_v s'accompagne d'une amélioration de la stabilité de fréquence à court terme.

Elle peut être à la base d'une méthode indirecte de détermination de $I(0)$, non accessible directement par des mesures de fréquence à cause de la durée d'intégration minimale imposée par les techniques de mesure.

Une conséquence théorique de la relation (54) est que, $I(0)$ étant nécessairement fini pour un signal à fluctuations de fréquence stationnaires (cf. II,2.1), Σ_v est également fini ; une courbe de Lorentz (Σ_v infini) ne saurait donc représenter rigoureusement le spectre de radiofréquences d'un tel signal (ce résultat sera précisé dans l'étude du bruit thermique interne des oscillateurs).

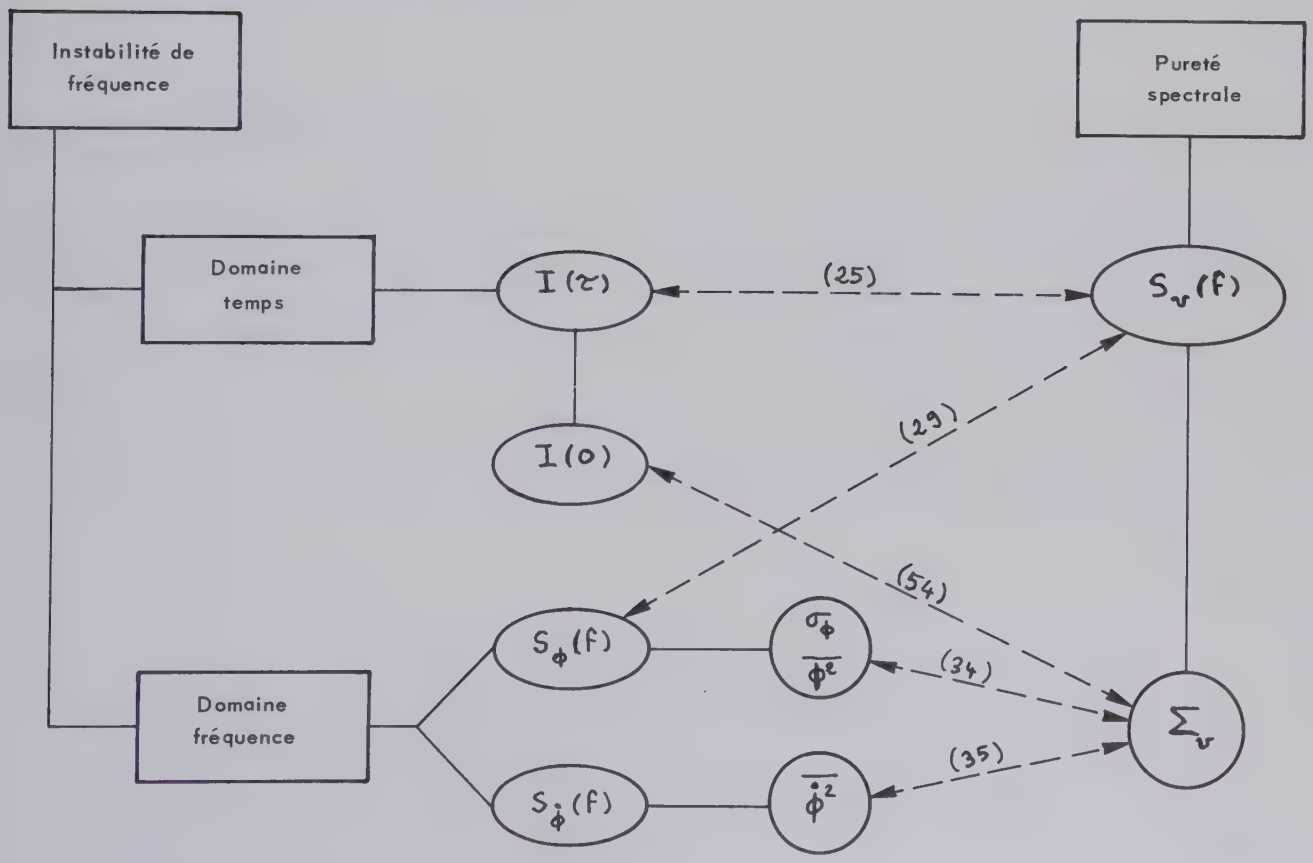
III,5. Conclusions

Les relations établies dans ce chapitre permettent d'avoir une vue synthétique du problème de la caractérisation des générateurs de fréquence perturbés par des sources de bruit stationnaire.

Elles permettent en outre à l'utilisateur de ne pas exiger d'un générateur de fréquence des performances contradictoires.

Le tableau II récapitule schématiquement les relations établies.

TABLEAU II - RELATIONS ENTRE INSTABILITÉ DE FRÉQUENCE ET PURETÉ SPECTRALE



Deuxième Partie
ÉTUDE DES BRUITS DANS LES OSCILLATEURS

Après un rappel des principales sources de bruit perturbant le fonctionnement des générateurs de fréquence (chapitre IV), une analyse détaillée des effets du bruit thermique interne des oscillateurs est développée au chapitre V, conduisant à des résultats nouveaux pour les propriétés relatives au domaine du très court terme.

Le chapitre VI présente une approche nouvelle pour l'étude du bruit de scintillation de fréquence, à l'aide d'un modèle aléatoire stationnaire.

Chapitre IV
REVUE DES SOURCES DE BRUIT DANS LES OSCILLATEURS

Les mécanismes physiques perturbant le fonctionnement de tout oscillateur radioélectrique sont décrits, ainsi que leurs effets sur l'instabilité de fréquence et la pureté spectrale.

On insistera surtout sur les perturbations aléatoires stationnaires rapides qui conduisent à des signaux représentables par les modèles mathématiques décrits au chapitre II. Elles résultent de mécanismes physiques d'origine microscopique (bruit de grenaille de l'élément actif, agitation thermique des électrons). La localisation judicieuse du circuit résonnant dans l'oscillateur peut rendre négligable les effets du bruit de grenaille.

Le bruit de scintillation de fréquence sera également décrit, car ses effets apparaissent dans tous les types de générateurs et imposent une limite à la stabilité dans le domaine temps lorsque τ croît au-delà de quelques secondes.

L'oscillateur étant représenté schématiquement sur la figure 14, tout bruit prenant naissance à l'intérieur de la boucle oscillatrice est «interne» ; tout bruit prenant naissance dans les circuits annexes de sortie est «externe» [19].

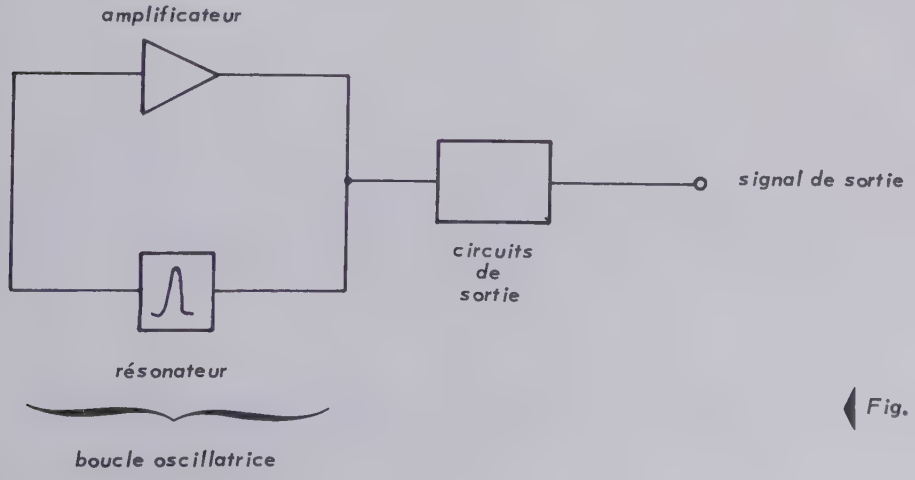


Fig. 14 - Schéma d'un oscillateur

Un tel schéma représente convenablement les oscillateurs à quartz, mais peut également représenter les oscillateurs quantiques du type maser.

IV,1. Bruit thermique interne additif (résultats classiques)

Le bruit thermique prenant naissance à l'intérieur de la boucle oscillatrice constitue la perturbation naturelle ultime que subit tout oscillateur radio-électrique* : il impose une limite thermodynamique aux fluctuations de fréquence et à la pureté spectrale. En utilisant les paramètres définis au chapitre II, diverses études théoriques ont permis d'établir [24, 25, 26, 27] :

(55) $$S_{\phi_i}(f) = \frac{\omega_o^2 kT}{2PQ^2} \qquad (f \gtrless 0)$$

(56) $$I_i(\tau) = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{kT}{2P\tau}}$$

(57) $$S_{v_i}(f) = \frac{A_o^2}{2}\,\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2(f-f_o)^2} \qquad \left(\alpha = \frac{\omega_o^2 kT}{4PQ^2}\right)$$

avec :

- k : constante de Boltzmann
- T : température effective de la source de bruit (°K)
- P : puissance délivrée au résonateur chargé (Watt)
- Q : cœfficient de qualité en charge du résonateur
- τ : durée d'intégration (seconde)

On note que le bruit de fréquence est blanc.

La remarque (c) du paragraphe II,2.1.1 est applicable à la loi $I(\tau) \sim \tau^{-\frac{1}{2}}$; une théorie plus complète des effets du bruit thermique interne sera développée au chapitre V, conduisant à une limite thermodynamique ultime pour l'instabilité à très court terme ($\lim_{\tau \to 0} I(\tau)$ finie).

D'autre part, le fait que $S_\phi(f)$ tende vers une valeur constante non nulle lorsque $f \to 0$ produit nécessairement une «diffusion» de la phase : l'écart-type $\sigma[\Delta\phi(t,\tau)]$ croît indéfiniment avec τ, $\Delta\phi(t,\tau) = \phi(t+\tau) - \phi(t)$ étant le bruit de phase accumulé pendant une durée τ.

Ce processus de diffusion sera étudié au paragraphe V,1.5 où il sera comparé à la diffusion d'une particule en mouvement brownien libre. La relation entre $S_v(f)$ et $I(\tau)$ permettra de montrer que le spectre R.F. lorentzien n'est qu'une forme approchée du spectre exact.

IV,2. Bruit thermique externe additif

Le bruit thermique externe, bien que moins fondamental que le bruit thermique interne, a une importance pratique considérable car ses effets sont souvent prédominants, particulièrement dans les oscillateurs à quartz [4, 16]. L'analyse de ses effets nécessite la connaissance de la bande passante du circuit de sortie qui impose la forme du spectre $S_\phi(f)$. Pour $\tau \gg$ temps de corrélation de $\dot{\phi}(t)$, l'instabilité est proportionnelle à τ^{-1} ; $\phi(t)$ est un processus aléatoire stationnaire, et le spectre de radiofréquences possède une composante discrète à la fréquence porteuse. Un modèle de bruit thermique externe sera étudié au paragraphe V,2.

---

* *Pour les lasers : $h\nu \gg kT$; c'est le bruit quantique qui constitue la perturbation naturelle ultime.*

Les bruits thermiques sont «additifs» car leur étude conduit à additionner une tension de signal et une tension de bruit pour établir l'expression du signal de sortie de l'oscillateur.

IV,3. Bruit multiplicatif en 1/f d'origine macroscopique

Ainsi que la quasi-totalité des autres dispositifs électroniques, le fonctionnement d'un générateur de fréquence est perturbé par des bruits de scintillation (aussi dénommés : bruits «flicker», bruits en $1/f$ ou bruits excessifs).

La fréquence émise est en effet fonction de nombreux paramètres (en particulier : de la fréquence de résonance du résonateur) possédant des fluctuations lentes d'origine macroscopique, dont le spectre varie en $1/f^{1+\varepsilon}$ $(|\varepsilon| \ll 1)$, aux très basses fréquences. Il en résulte une modulation de fréquence et l'observation d'un spectre expérimental $S_{\dot{\phi}}(f) \sim 1/f^{1+\varepsilon}$ aux très basses fréquences. Toutefois, les paramètres en cause sont peu susceptibles d'être introduits dans une théorie physique (propreté des surfaces, intégrité des contacts électriques, fluctuations aléatoires des contraintes, etc...) ; aucune théorie générale ne permet, à l'heure actuelle, d'établir le spectre des divers bruits de scintillation à partir de phénomènes physiques fondamentaux [28].

Une analyse classique [16] rappelée en VI,2.1 établit l'instabilité de fréquence dans le domaine temps qui peut être déduite du spectre $S_{\dot{\phi}}(f) = A/f$.

Une approche nouvelle développée au chapitre VI, permet l'interprétation des propriétés observées expérimentalement :

- $S_{\dot{\phi}}(f) \sim 1/f^{1+\varepsilon}$ aux très basses fréquences ;
- Palier de $I(\tau)$ pour τ suffisament grand.

Ordres de grandeur typiques du «palier flicker» [28] :

- Etalon passif à jet de césium : 10^{-13}
- Etalon passif à vapeur de rubidium : $3{,}6.10^{-13}$
- Maser à hydrogène : 10^{-14}
- Oscillateur à quartz (5 MHz) : 10^{-12}

IV,4. Bruits dans les générateurs atomiques passifs

Les étalons atomiques passifs ne peuvent être représentés par le schéma simple de la figure 14, mais par un schéma plus complet (voir fig. 4 et 5) mettant en évidence le bruit de la référence et le gain de la boucle d'asservissement. En supposant le bruit de l'oscillateur à quartz et le bruit de la référence non corrélés, ainsi que la linéarité du système, on a la relation [16, 29].

$$S_{\dot{\phi}}(f) = S_{\dot{\phi}_{osc}}(f) \frac{1}{|1 + G(f)|^2} + S_{\dot{\phi}_{Réf}}(f) \left| \frac{G(f)}{1 + G(f)} \right|^2 \qquad (58)$$

avec :

- $S_{\dot{\phi}}(f)$: spectre des fluctuations de la fréquence de sortie
- $S_{\dot{\phi}_{osc}}(f)$: spectre des fluctuations de la fréquence de l'oscillateur à quartz
- $S_{\dot{\phi}_{Réf}}(f)$: spectre des fluctuations de la fréquence de la référence
- $G(f)$: gain de boucle total.

L'expression simple $G(f) = f_c/if$ qui est une bonne approximation du gain de goucle réel, donne :

$$S_{\dot{\phi}}(f) = S_{\dot{\phi}_{osc}}(f) \frac{f^2}{f_c^2 + f^2} + S_{\dot{\phi}_{Réf}}(f) \frac{f_c^2}{f_c^2 + f^2} \qquad (59)$$

Le bruit de l'oscillateur subit un filtrage passe-haut, et le bruit de la référence un filtrage passe-bas : l'instabilité de fréquence à court terme est donc imposée par l'oscillateur à quartz, et l'instabilité à long terme par la référence (bruit de grenaille dû au courant ionique pour l'étalon à jet de césium, ou au faisceau lumineux dans l'étalon à vapeur de rubidium).

A une référence atomique et un oscillateur à quartz donnés, correspond une valeur optimale de la fréquence de coupure f_c de la boucle fermée ; la valeur de f_c est également déterminée par l'application faite de l'étalon de fréquence.

IV,5. Perturbations systématiques

Les générateurs sinusoïdaux sont parfois affectés d'une lente variation systématique de certaines de leurs propriétés ; l'exemple typique est le «vieillissement» du cristal de quartz entraînant une variation lente et régulière de sa fréquence centrale. La fréquence émise par l'oscillateur dérive alors lentement au cours du temps.

Pratiquement, les effets de la dérive sont négligeables si on étudie l'oscillateur sur des durées suffisamment courtes ($\tau \ll 3.10^3$ secondes par exemple), et sa régularité permet parfois d'en tenir compte dans les expériences de plus longue durée (jours, mois, année).

Cette dérive est mesurée par la variation de la fréquence centrale Δf_o pendant la durée considérée. En valeur relative, on a par exemple :

$\frac{\Delta f_o}{f_o} < 5.10^{-12}$ sur 3 ans pour l'étalon passif à jet de césium

$< 2.10^{-11}$ par mois pour l'étalon passif à vapeur de rubidium

$< 5.10^{-10}$ par jour pour un oscillateur à quartz 5 MHz

$< 10^{-12}$ par an pour un maser à hydrogène.

Ces ordres de grandeur montrent que le maser à hydrogène et l'étalon passif à jet de césium fonctionnant dans des conditions ambiantes convenables, sont pratiquement affranchis de dérive [28].

IV,6. Conclusion

Tous les générateurs de fréquence sont perturbés à des degrés divers par ces différents bruits et leurs effets se combinent pour donner l'instabilité totale dans le domaine temps :

$$I(\tau) = \left(\sum_{j=1}^{n} I_j^2(\tau) \right)^{1/2}$$

où $I_j(\tau)$ est relatif à la $j$ème source de bruit.

L'allure générale de $I(\tau)$ dépend des ordres de grandeur numériques des différentes composantes ; un exemple possible est représenté sur la figure 15. Le bruit en $1/\sqrt{\tau}$ est souvent masqué par la valeur élevée du palier.

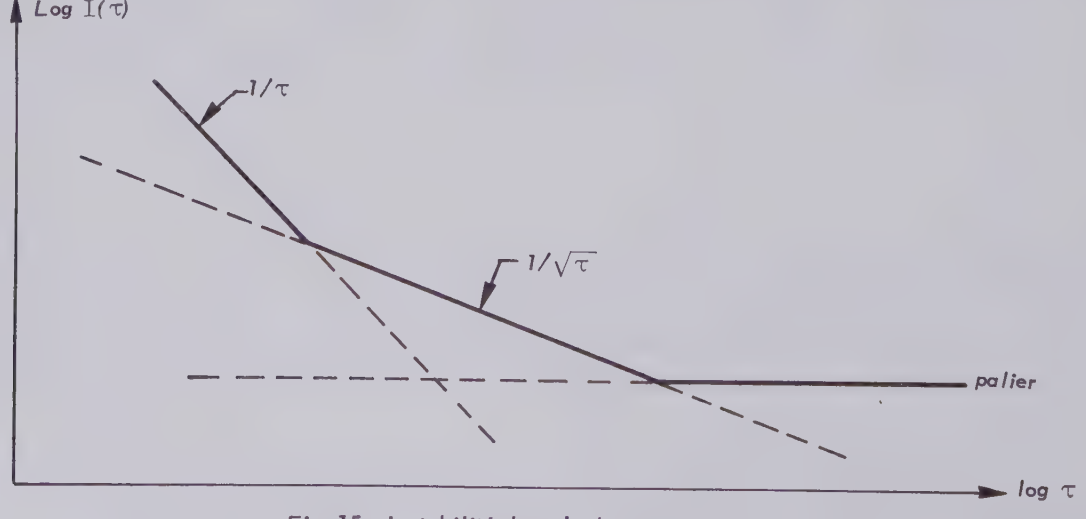


Fig. 15 - Instabilité dans le domaine temps

Chapitre V
THÉORIE GÉNÉRALISÉE DU BRUIT THERMIQUE INTERNE ADDITIF

La théorie développée dans ce chapitre décrit correctement les propriétés relatives au domaine du très court terme, et met en évidence l'existence d'une limite thermodynamique ultime pour l'instabilité à très court terme.

Un modèle de bruit thermique externe additif est également étudié pour permettre la comparaison des ordres de grandeur des perturbations créées.

V,1. Bruit thermique interne additif

La nécessité de compléter l'analyse classique du bruit thermique interne a été notée à propos de la loi :

$$I(\tau) = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{kT}{2P\tau}} \tag{56}$$

dont la limite infinie lorsque τ tend vers zéro ne possède pas d'interprétation physique.

L'analyse présentée ici introduit les effets de la sélectivité du résonateur de la boucle oscillatrice : le filtrage de la tension de bruit thermique fournit une expression complète de $S_\phi(f)$. Les relations établies dans la première partie permettent de calculer $I(\tau)$ puis $S_\nu(f)$, mettant en évidence l'existence d'une limite thermodynamique ultime de l'instabilité à très court terme [30] et la forme exacte du spectre de radio-fréquences [33].

V,1.1. Filtrage du bruit par le résonateur et l'oscillateur

L'oscillateur étant représenté sur la figure 16, le bruit thermique interne prend naissance dans la résistance R représentant les pertes du résonateur chargé. La densité spectrale de puissance de ce bruit (initialement blanc dans le domaine radio-électrique) est imposée par la réponse en fréquence du circuit résonnant. Comme c'est le cas pour les oscillateurs à quartz, l'amplificateur* est supposé beaucoup moins sélectif que le résonateur ; l'autre cas extrême (maser) sera considéré plus loin.

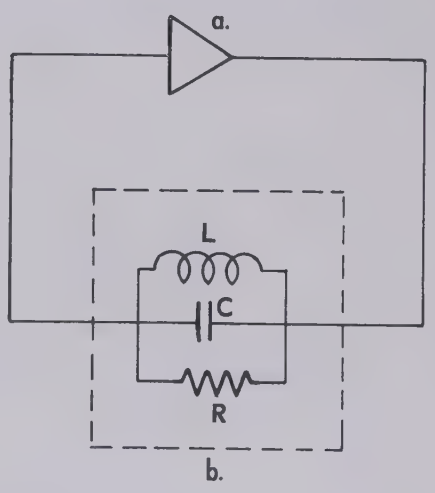


Fig. 16 - Représentation schématique d'une boucle oscillatrice.
a. amplificateur large-bande
b. résonateur à cœfficient de qualité élevé

La densité spectrale de puissance (fig. 17) de la tension de bruit filtrée $n_i(t)$ s'écrit :

$$S_{n_i}(f) = \frac{2kTR}{1 + Q^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2} \qquad (f \gtrless 0) \tag{60}$$

T est la température effective de la source de bruit et Q le cœfficient de qualité en charge du résonateur.

---

* *Nous le supposerons sans bruit*

Un tel bruit à spectre étroit peut se décomposer sous la forme [31] :

$$n_i(t) = n_{ip}(t) \cdot \cos \omega_o t + n_{iq}(t) \cdot \sin \omega_o t$$

où $n_{ip}(t)$ et $n_{iq}(t)$ sont des processus aléatoires stationnaires, variant lentement devant $\cos \omega_o t$ et $\sin \omega_o t$, pratiquement statistiquement indépendants, et tels que :

(61) $$R_{n_{ip}}(\tau) \equiv R_{n_{iq}}(\tau) \qquad S_{n_{ip}}(f) \equiv S_{n_{iq}}(f)$$

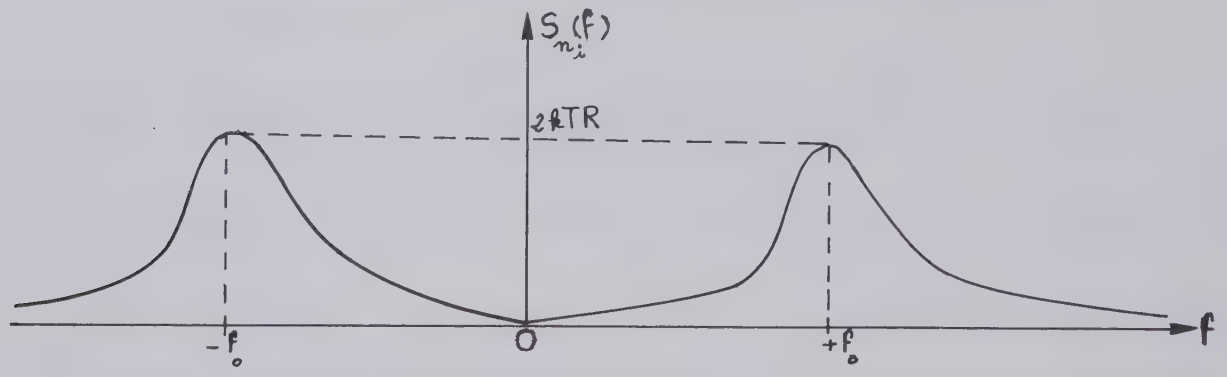


Fig. 17 - Spectre de $n_i(t)$

En fait, la symétrie de $S_{n_i}(f)$ autour de $\pm f_o$ est nécessaire pour faire l'hypothèse : $n_{ip}(t)$ et $n_{iq}(t)$ rigoureusement statistiquement indépendants ; aussi utiliserons nous l'expression approchée suivante, d'autant plus valable que le cœfficient de qualité Q du résonateur est élevé :

(62) $$S_{n_i}(f) = \frac{2kTR}{1 + 4Q^2\left(\frac{f+f_o}{f_o}\right)^2} + \frac{2kTR}{1 + 4Q^2\left(\frac{f-f_o}{f_o}\right)^2}$$

L'indépendance statistique de $n_{ip}(t)$ et $n_{iq}(t)$ permet d'établir une relation simple entre les fonctions d'autocorrélation de $n_i(t)$ et $n_{iq}(t)$:

(63) $$R_{n_i}(\tau) = R_{n_{iq}}(\tau) \cdot \cos 2\pi f_o \tau$$

et, par Transformation de Fourier, la relation entre les densités spectrales de puissance :

(64) $$S_{n_i}(f) = \frac{S_{n_{iq}}(f+f_o) + S_{n_{iq}}(f-f_o)}{2}$$

La comparaison des expressions (62) et (64) de $S_{n_i}(f)$ donne l'expression de $S_{n_{iq}}(f)$ qui sera utilisée pour le calcul de $S_{\phi_i}(f)$:

(65) $$S_{n_{iq}}(f) = \frac{4kTR}{1 + 4Q^2\left(\frac{f}{f_o}\right)^2} \qquad (f \geq 0)$$

V,1.2. Instabilité dans le domaine fréquence : expression de $S_{\phi_i}(f)$:

La tension de bruit $n_i(t)$ dans la boucle oscillatrice crée des fluctuations d'amplitude, ainsi que des fluctuations de la phase entraînant des fluctuations de la fréquence d'oscillation telles que le désaccord par rapport à la fréquence du résonateur crée un déphasage égal et opposé ; la condition d'oscillation (déphasage total nul sur la boucle) est ainsi maintenue en permanence. Le signal de sortie est alors obtenu en combinant

additivement le signal calé sur sa nouvelle fréquence et la tension de bruit $n_i(t)$, ce qui permet d'établir l'expression des fluctuations de fréquence angulaire $\dot{\phi}_i(t)$ [19, 32] :

$$(66) \qquad \dot{\phi}_i(t) = -\frac{\pi f_o}{Q} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{n_{iq}(t)\cos\phi_i(t) + n_{ip}(t)\sin\phi_i(t)}{A_o + n_{ip}(t)\cos\phi_i(t) - n_{iq}(t)\sin\phi_i(t)} \right)$$

Des approximations sont nécessaires pour établir la solution de cette équation différentielle transcendante : nous supposerons : $\overline{n_{ip}^2(t)}$ et $\overline{n_{iq}^2(t)} \ll A_o^2$ (hypothèse raisonnable pour un oscillateur de haute qualité à rapport signal/bruit élevé), et $n_{ip}(t)\sin\phi_i(t)$ négligeable devant $n_{iq}(t)\cos\phi_i(t)$.

L'expression de $\dot{\phi}_i(t)$ s'écrit alors :

$$(67) \qquad \dot{\phi}_i(t) \simeq -\frac{\pi f_o}{A_o Q}\, n_{iq}(t)$$

soit :

$$(68) \qquad S_{\dot{\phi}_i}(f) = \left(\frac{\pi f_o}{A_o Q}\right)^2 S_{n_{iq}}(f)$$

$$(69) \qquad \boxed{S_{\dot{\phi}_i}(f) = \frac{\omega_o^2 kT}{2PQ^2} \frac{1}{1 + 4Q^2\left(\frac{f}{f_o}\right)^2}} \qquad P = \frac{A_o^2}{2R} \qquad f \gtrless 0$$

La comparaison avec le spectre classique (55) montre que le filtrage a eu pour effet d'atténuer les composantes de fréquences élevées de $S_{\dot{\phi}_i}(f)$, correspondant à une amélioration de la stabilité à court terme qui se traduira dans le domaine temps par une valeur finie de $\lim_{\tau \to 0} I(\tau)$ (fig. 18 et 19).

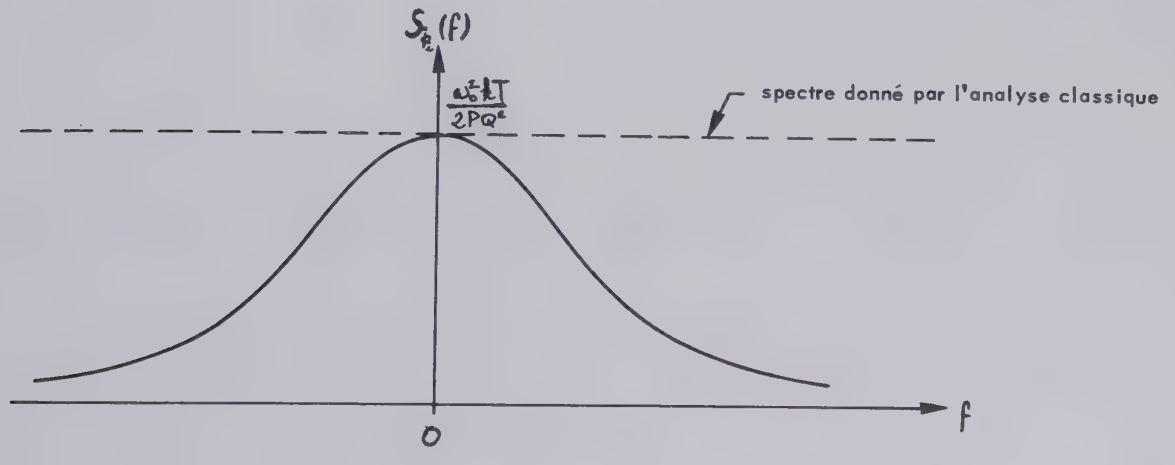


Fig. 18 - $S_{\dot{\phi}_i}(f)$ lorentzien

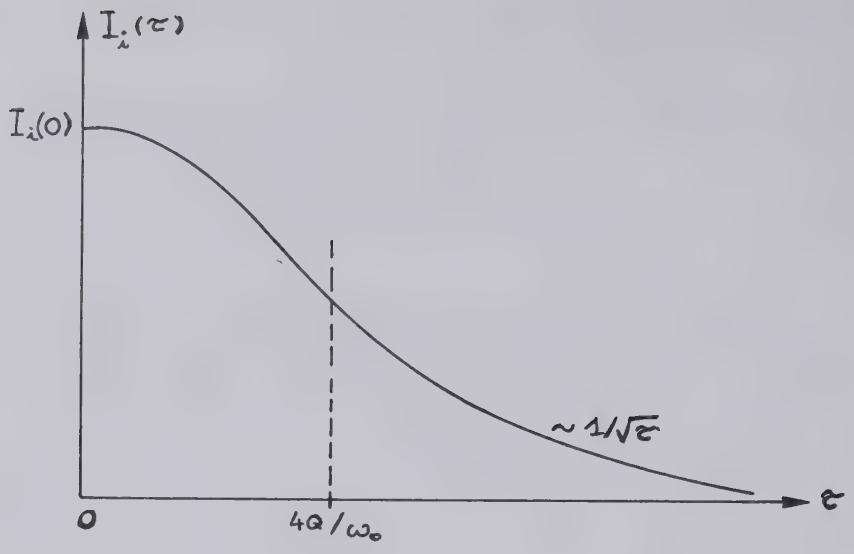


Fig. 19 - Saturation de $I_i(\tau)$

V,1.3. Instabilité dans le domaine temps : saturation de $I_i(\tau)$

L'expression de $S_{\phi_i}(f)$ reportée dans la relation (17) permet de calculer l' instabilité de fréquence dans le domaine temps :

$$I_i(\tau) = \sqrt{\frac{kT}{2PQ^2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4Q^2\left(\frac{f}{f_o}\right)^2} \left(\frac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f}\right)^2 df \right)^{1/2}$$

soit* :

(70)
$$\boxed{I_i(\tau) = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{kT}{2P\tau}} \left[1 - \frac{Q}{\pi f_o \tau} + \frac{Q}{\pi f_o \tau} e^{-\frac{\pi f_o \tau}{Q}} \right]^{1/2}}$$

Valeurs asymptotiques de $I_i(\tau)$

Lorsque τ est très grand par rapport au temps de corrélation $Q/\pi f_o$ des fluctuations de fréquence angulaire, le crochet se réduit à l'unité et on retrouve la loi classique :

(56)
$$I_i(\tau) \simeq \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{kT}{2P\tau}}$$

Pour τ très petit devant $Q/\pi f_o$, on trouve une valeur finie indépendante de τ :

$$I_i(\tau) \simeq \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{kT}{2P\tau}} \left[1 - \frac{Q}{\pi f_o \tau} + \frac{Q}{\pi f_o \tau}\left(1 - \frac{\pi f_o \tau}{Q} + \frac{\pi^2 f_o^2 \tau^2}{2Q^2}\right) \right]^{1/2}$$

(71)
$$\simeq \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{kT}{2P\tau}\,\frac{\pi f_o \tau}{2Q}}$$

$$\simeq \sqrt{\frac{\pi k T f_o}{4Q^3 P}}$$

---

* *On utilise* :
$$\int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4b^2}\left[2a - \frac{1}{b}\left(1-e^{-2ab}\right)\right] \qquad (a \text{ et } b > 0)$$

L'instabilité de fréquence à très court terme possède donc une limite thermodynamique ultime (fig. 19) :

(72) $$\lim_{\tau \to 0} I_i(\tau) = \sqrt{\frac{\pi k T f_o}{4 Q^3 P}}$$

En coordonnées logarithmiques, les asymptotes de $I_i(\tau)$ pour $\tau \to 0$ et $\tau \to \infty$, se coupent pour $\tau_i = 4Q/\omega_o = 2\tau_{ci}$, où τ_{ci} est le temps de corrélation de $\phi_i(t)$ défini par :

$$R_{\dot{\phi}_i}(\tau_{ci}) = \frac{R_{\dot{\phi}_i}(0)}{e} \qquad (e = 2{,}71\ldots)$$

avec $$R_{\dot{\phi}_i}(\tau) = \frac{\omega_o^3 kT}{8PQ^3} \cdot e^{-\frac{\pi f_o |\tau|}{Q}}$$

Vérification expérimentale de la saturation de $I_i(\tau)$

La vérification expérimentale directe de la saturation de $I_i(\tau)$ nécessite un oscillateur obéissant aux hypothèses utilisées pour l'analyse, et tel que :

a) son bruit thermique interne soit l'origine prépondérante de son instabilité à très court terme (ce n'est pas le cas des oscillateurs à quartz) ;

b) la valeur de τ_i soit suffisamment élevée, toutes les techniques de mesure de $I(\tau)$ possédant une valeur minimale τ_{min} au-dessous de laquelle les mesures ne sont plus possibles.

V,1.4. Spectre de radio-fréquences

La nature physique du bruit thermique fait que le processus aléatoire $n_i(t)$ est gaussien, ainsi que $n_{i_q}(t)$ en vertu d'une propriété d'additivité des processus gaussiens ; il en est alors de même pour $\phi_i(t)$ et la relation établie entre $S_v(f)$ et $I(\tau)$ est applicable ($I(\tau)$ est prolongé de façon paire pour $\tau < 0$).

V,1.4.1. Calcul du spectre

Il suffit de reporter :

$$I_i(\tau) = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{kT}{2P|\tau|}}\left[1 - \frac{Q}{\pi f_o|\tau|} + \frac{Q}{\pi f_o|\tau|} e^{-\frac{\pi f_o|\tau|}{Q}}\right]^{1/2}$$

dans la relation générale :

(25) $$S_v(f) = \frac{A_o^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega_o^2}{2}\tau^2 I^2(\tau)} \cos 2\pi f_o \tau \; e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau$$

En posant $\alpha = \frac{2Q}{\omega_o}$ et $\beta = \frac{kT\omega_o^2}{4PQ^2}$, il vient :

(73) $$e^{-\frac{\omega_o^2}{2}\tau^2 I_i^2(\tau)} = e^{\alpha\beta}\; e^{-\beta|\tau|}\; e^{-\alpha\beta \cdot e^{-\frac{|\tau|}{\alpha}}}$$

La transformée de Fourier de cette expression (calculée dans l'annexe n° 2) vaut :

(74) $$e^{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}\,\gamma^n\,\frac{2B_n}{B_n^2 + 4\pi^2 f^2}\right)$$

où $\gamma = \alpha\beta = \dfrac{kT\omega_o}{2PQ}$ et $B_n = \beta + \dfrac{n}{\alpha}$ (n entier).

En ne gardant que la partie centrée sur $+f_o$ (que l'on multiplie par deux pour conserver la même aire totale), le spectre de radiofréquences complet a pour expression :

(75) $$S_{v_i}(f) = \frac{A_o^2}{2} e^{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma^n \frac{2B_n}{B_n^2 + 4\pi^2(f-f_o)^2}$$

V,1.4.2. Propriétés du spectre

Calcul de l'aire sous $S_{vi}(f)$

Le signal étudié n'étant modulé qu'en fréquence, il est aisé de vérifier que sa puissance est égale à celle de l'onde non modulée :

(76) $$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{v_i}(f)\,df = \frac{A_o^2}{2} e^{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma^n \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2B_n}{B_n^2 + 4\pi^2(f-f_o)^2}\,df}_{=1 \quad \forall n} = \frac{A_o^2}{2}$$

Largeur de raie de $S_{vi}(f)$

L'étalement du spectre R.F. autour de la fréquence porteuse f_o peut être commodément estimé par l'expression :

(77) $$\Sigma_{v_i} = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_o)^2 S_{v_i}(f)\,df}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{v_i}(f)\,df} \right)^{1/2}$$

Le rapprochement de deux résultats antérieurs donne Σ_{v_i} sans aucun calcul :

$$\lim_{\tau \to o} I(\tau) = \frac{\Sigma_v}{f_o} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\tau \to o} I_i(\tau) = \sqrt{\frac{\pi k T f_o}{4 Q^3 P}}$$

soit :

(78) $$\Sigma_{v_i} = \sqrt{\frac{\pi k T f_o^3}{4 Q^3 P}}$$

Le calcul direct de Σ_{v_i} est toutefois effectué dans l'annexe n°3 car il montre pourquoi Σ_{v_i} a une valeur finie, alors que le Σ_v relatif au spectre approché lorentzien est infini (en accord d'ailleurs avec $\lim_{\tau \to o} \tau^{-\frac{1}{\tau}} = \infty$).

Exemple numérique :

Des valeurs numériques typiques pour un oscillateur à quartz sont les suivantes :

$T = 10^3\,°K$; $f_o = 5.10^6\,Hz$; $Q = 2.10^6$; $P = 10^{-7}\,W$.

Il en résulte la valeur extrêmement faible $I_i(o) \simeq 2{,}5.10^{-13}$ qui montre pourquoi le bruit thermique interne est inobservable.

De même, la largeur de raie $\Sigma_{v_i} \simeq 1{,}25.10^{-6}\,Hz$ est bien trop faible pour être analysée à l'aide d'un filtre physiquement réalisable.

Ces valeurs numériques montrent qu'un oscillateur à quartz qui ne serait perturbé que par son bruit thermique interne, délivrerait un signal d'une très haute qualité.

Formes asymptotiques de $S_{v_i}(f)$

Il est intéressant de calculer les formes asymptotiques de $S_{v_i}(f)$ en fonction de la valeur du rapport signal/bruit interne.

Considérons le produit $\sqrt{R_{\dot{\phi}_i}(0)}\,.\,\tau_{ci}$ $\left(R_{\dot{\phi}_i}(0) = \frac{\omega_o^3 kT}{8Q^3P}\right.$ et $\left.\tau_{ci} = \frac{2Q}{\omega_o}\right)$ qui vaut :

(79) $$\boxed{\sqrt{R_{\dot{\phi}_i}(0)}\;\tau_{ci} = \sqrt{\frac{\pi kT f_o}{QP}} = \sqrt{\pi \frac{P_B}{P}}} \quad \text{avec} \quad P_B = kT\frac{f_o}{Q}$$

L'analyse du bruit thermique interne a été effectuée en faisant l'hypothèse : $\overline{n_{iq}^2(t)} \ll A_o^2$ soit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_{iq}}(f)\,df \ll A_o^2$$

$$\pi kT\frac{f_o}{Q} \ll P \qquad \left(P = \frac{A_o^2}{2R}\right)$$

d'où :

$$\boxed{\sqrt{R_{\dot{\phi}_i}(0)}\,.\,\tau_{ci} \ll 1}$$

Or, pour $\tau \gg \tau_{ci}$ la loi approchée $I_i^2(\tau) = kT/(2PQ^2\tau)$ permet d'écrire l'expression

(80) $$R_{v_i}^{(o)}(\tau) = e^{-\frac{\omega_o^2}{2}\tau^2 I_i^2(\tau)} = e^{-\frac{\omega_o^2 kT}{4PQ^2}|\tau|}$$

qui est valable pour la valeur $\tau_1 = 1/\sqrt{R_{\dot{\phi}_i}(0)} \gg \tau_{ci}$, soit :

(81) $$R_{v_i}^{(o)}(\tau_1) = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega_o kT}{2PQ}}\right) \simeq 1$$

L'expression approchée $R_{v_i}^{(o)}(\tau)$ est donc quasiment valable quel que soit τ et donne le spectre lorentzien approché donné par l'équation (57).

Le spectre complet donné par l'équation (75) est donc en pratique très voisin du spectre approché lorentzien, et d'autant plus que $\sqrt{R_{\dot{\phi}_i}(0)}\;\tau_{ci}$, qui est lié au rapport bruit/signal, tend vers zéro. Il en diffère néanmoins suffisamment pour que la valeur de Σ_{v_i} soit finie (décroissance plus rapide lorsque l'on s'éloigne de la porteuse).

L'autre cas extrême est celui où l'on fait croître le rapport bruit/signal ; l'expression asymptotique obtenue pour $S_{v_i}(f)$ n'est toutefois qu'une limite mathématique, puisque l'analyse physique postulait un rapport bruit/signal très inférieur à l'unité ;

pour $\tau \ll \tau_{ci}$:

(82) $$I_i^2(\tau) \simeq \frac{\pi kT f_o}{4Q^3P} \quad \text{et} \quad R_{v_i}^{(o)}(\tau) \simeq e^{-\frac{\omega_o^2 \cdot \pi kT f_o}{2 \cdot 4Q^3P}\tau^2}$$

Dans le cas extrême (non physique) où $\sqrt{R_{\dot{\phi}_i}(0)}\;\tau_{ci} \gg 1$, l'expression (82) de $R_{v_i}^{(o)}(\tau)$ est utilisable pour la valeur :

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{R_{\dot{\phi}_i}(0)}} \ll \tau_{ci}$$

et vaut alors :

(83) $$R_{v_i}^{(o)}(\tau_1) = e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0{,}61$$

L'expression de $R^{(o)}_{v_i}(\tau)$ est ainsi quasiment valable quel que soit τ, et le spectre R.F. est alors approximativement gaussien (ne pas confondre avec le caractère gaussien de la fluctuation de fréquence) :

(84) $$R_{v_i}(\tau) = \frac{A_o^2}{2}\, e^{-\frac{\omega_o^2}{2}\cdot\frac{\pi k T f_o}{4 Q^3 P}\tau^2} \cdot \cos 2\pi f_o \tau$$

(85) $$\boxed{S_{v_i}(f) = \frac{A_o^2}{2}\,\frac{1}{\sigma_{RF}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(f-f_o)^2}{2\sigma_{RF}^2}}}$$

avec

(86) $$\sigma_{RF} = \Sigma_v = \sqrt{\frac{\pi k T f_o^3}{4 Q^3 P}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\overline{\dot\phi^2(t)}}$$

Ainsi, dans le cas limite purement formel où $\sqrt{R_{\dot\phi_i}(0)}\,\tau_{ci} \gg 1$, le spectre R.F. s'identifie (au facteur $A_o^2/2$ près) à la fonction densité de probabilité des fluctuations de fréquence $\dot\varphi(t) = \dot\phi(t)/2\pi$

V,1.5. *Analogie entre la diffusion de phase et la diffusion du mouvement brownien*

Nous nous proposons de comparer les lois donnant, à l'instant τ :

- la variance de la position (plus précisément de sa projection sur un axe x) d'une particule en mouvement brownien libre ;
- la variance du bruit de phase accumulé de $t=0$ à $t=\tau$, pour l'oscillateur perturbé uniquement par son bruit thermique interne additif.

L'expression complète de $I_i(\tau)$ permet de montrer que la similitude des deux lois déjà connue pour les valeurs de τ suffisamment élevée, existe en fait pour tout τ aussi petit soit-il.

V,1.5.1. Similitude des expressions approchées

A l'instant τ, la variance de la position $x(\tau)$ d'une particule de masse m en mouvement brownien libre s'écrit :

(87) $$\boxed{\sigma^2[x(\tau)] = 2D'\tau}$$

où D' est un cœfficient de diffusion qui s'exprime en fonction des paramètres physiques du système.

Pour l'oscillateur, on a :

(5) $$\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\dot\phi(\theta)\,d\theta = \frac{\Delta\phi(t,\tau)}{\tau}$$

où $\Delta\phi(t,\tau)$ représente le bruit de phase accumulé de t à $t+\tau$;

l'expression approchée (56) de $I_i(\tau)$ entraîne :

(88) $$\sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right] = \frac{2D}{\tau}$$

où D est un cœfficient dépendant des paramètres de l'oscillateur.

En choisissant $t=0$:

(89) $$\boxed{\sigma^2[\Delta\phi(\tau)] = \tau^2\,\sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{0,\tau}\right] = 2D\tau}$$

La similitude des lois (87) et (89) a fait dire que la phase diffuse «en mouvement brownien» [17].

(Numériquement, pour un oscillateur à quartz typique : $\sigma[\Delta\phi(\tau)] \simeq 4.10^{-6}\sqrt{\tau}$ rd).

V,1,5.2. Similitude des expressions exactes

L'expression (87) n'est en fait valable que pour τ supérieur à une valeur caractéristique du système physique ; sa généralisation donne [34] :

(90) $$\boxed{\sigma^2[x(\tau)] = \alpha'\left(e^{-\beta'\tau} - 1 + \beta'\tau\right)} \qquad \alpha'\beta' = 2D'$$

(β' est le rapport : cœfficient de frottement/ masse de la particule).

$$\begin{cases} \text{Pour} \quad \tau >> \beta'^{-1} : & \sigma^2[x(\tau)] \simeq 2D'\tau \\ \text{Pour} \quad \tau << \beta'^{-1} : & \sigma^2[x(\tau)] \sim \tau^2 \end{cases}$$

L'expression (70) de $I_i(\tau)$ donne :

(91) $$\sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right] = \frac{\alpha''}{\tau^2}\left(e^{-\beta''\tau} - 1 + \beta''\tau\right)$$

d'où la variance de l'erreur de phase accumulée :

(92) $$\boxed{\sigma^2[\Delta\phi(\tau)] = \alpha''\left(e^{-\beta''\tau} - 1 + \beta''\tau\right)}$$

La comparaison des lois (90) relative au mouvement brownien et (92) concernant la phase de l'oscillateur, montre la similitude complète des deux processus de diffusion.

V,1.6. Analyse plus précise du filtrage du bruit par le résonateur de l'oscillateur

L'expression lorentzienne (69) de $S_{\dot\phi_i}(f)$ a été obtenue en supposant $n_{ip}(t)$ et $n_{iq}(t)$ statistiquement indépendants, et en utilisant l'expression approchée (62) de $S_{n_i}(f)$. L'expression de $S_{\dot\phi_i}(f)$ tenant compte de la corrélation entre $n_{ip}(t)$ et $n_{iq}(t)$, et de l'expression exacte de $S_{n_i}(f)$ peut être établie :

(93) $$n_i(t) = n_{ip}(t)\cos\omega_0 t + n_{iq}(t)\sin\omega_0 t$$

(60) $$S_{n_i}(f) = \frac{2kTR}{1 + Q^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2} \qquad (f \gtrless 0)$$

Les propriétés de la décomposition d'une fonction aléatoire à spectre étroit permettent d'écrire, pour $F \gtrless 0$:

(94) $$S_{n_{iq}}(F) = \begin{cases} S_{n_i}(f_0+F) + S_{n_i}(f_0-F) & \text{si} \quad 0 \leqslant F \leqslant f_0 \\ S_{n_i}(f_0+F) & \text{si} \quad F \geqslant f_0 \end{cases}$$

Ce spectre étant prolongé de façon paire pour $F<0$.

La relation (68) donne alors :

(95) $$S_{\dot\phi_i}(F) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2 f_0^2 kT}{PQ^2}\left[\dfrac{1}{1+Q^2\left(\dfrac{f_0+F}{f_0} - \dfrac{f_0}{f_0+F}\right)^2} + \dfrac{1}{1+Q^2\left(\dfrac{f_0-F}{f_0} - \dfrac{f_0}{f_0-F}\right)^2}\right] & (0 \leqslant F \leqslant f_0) \\ \dfrac{\pi^2 f_0^2 kT}{PQ^2} \cdot \dfrac{1}{1+Q^2\left(\dfrac{f_0+F}{f_0} - \dfrac{f_0}{f_0+F}\right)^2} & (F \geqslant f_0) \end{cases}$$

(prolongé de façon paire pour $F < 0$).

Cette expression généralise le spectre lorentzien (69).

L'instabilité dans le domaine temps s'obtient en reportant $S_{\dot{\phi}_i}(F)$ dans l'équation :

$$I_i(\tau) = \frac{1}{\omega_0}\left[2\int_0^{+\infty} S_{\dot{\phi}_i}(F)\left(\frac{\sin \pi\tau F}{\pi\tau F}\right)^2 dF\right]^{1/2}$$

Le calcul de l'annexe n°4 donne $I_i(\tau)$ sous forme intégrale :

(96) $$\boxed{I_i(\tau) = \sqrt{\frac{kT}{2PQ^2}}\left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}\left(\frac{\sin \pi\tau(f-f_0)}{\pi\tau(f-f_0)}\right)^2 df\right]^{1/2}}$$

Valeurs asymptotiques de $I_i(\tau)$:

(97) $$\lim_{\tau\to 0} I_i(\tau) = \sqrt{\frac{kT}{2PQ^2}}\left[\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2} df}_{=\pi f_0/2Q}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi kT f_0}{4Q^3P}}$$

(98) $$\lim_{\tau\to\infty} I_i(\tau) = \sqrt{\frac{kT}{2PQ^2}}\left[\frac{1}{\tau}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}\delta(f-f_0)\,df\right]^{1/2} = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{kT}{2P\tau}}$$

L'expression généralisée de $I_i(\tau)$ possède donc le même comportement asymptotique que la loi (70). Les deux expressions ne diffèrent que dans la zone où τ est voisin du temps de corrélation $\tau_{ci} = Q/\pi f_0$ de $\dot{\phi}_i(t)$.

V,1.7. Application aux masers

L'étude des masers diffère de celle effectuée précédemment, par le fait que l'atome ou la molécule possède une sélectivité plus grande que celle du résonateur où a lieu l'émission induite. Un nouveau paramètre s'introduit dans l'énalyse : le cœfficient de qualité atomique ou moléculaire Q_a.

La théorie classique du maser donne [28] :

(99) $$S_{\dot{\phi}_i}(f) = \frac{kT\omega_0^2}{2PQ_a^2} \qquad (f \gtrless 0)$$

où P est la puissance délivrée par le faisceau à la cavité chargée, et :

(100) $$I_i(\tau) = \frac{1}{Q_a}\sqrt{\frac{kT}{2P\tau}}$$

L'analyse tenant compte de la sélectivité du résonateur donne

(101) $$S_{\dot{\phi}_i}(f) = \frac{kT\omega_0^2}{2PQ_a^2}\cdot\frac{1}{1+4Q^2(f/f_0)^2}$$

où apparaissent Q_a et Q (cœfficient de la cavité chargée).

L'instabilité dans le domaine temps est alors [16] :

$$(102)\quad I_i(\tau) = \frac{1}{Q_a}\sqrt{\frac{kT}{2P\tau}}\left[1 - \frac{Q}{\pi f_o \tau} + \frac{Q}{\pi f_o \tau}\, e^{-\frac{\pi f_o \tau}{Q}}\right]^{1/2}$$

Valeurs asymptotiques de $I_i(\tau)$

(103) • Pour $\tau \gg \frac{Q}{\pi f_o}$: $\quad I_i(\tau) \simeq \frac{1}{Q_a}\sqrt{\frac{kT}{2P\tau}}$

(104) • Pour $\tau \ll \frac{Q}{\pi f_o}$: $\quad I_i(\tau) \simeq \sqrt{\frac{\pi k T f_o}{4 P Q_a^2 Q}}$

La limite thermodynamique* ultime pour l'instabilité à très court terme d'un maser a donc pour expression :

$$(105)\quad \lim_{\tau \to 0} I_i(\tau) = \sqrt{\frac{\pi k T f_o}{4 P Q_a^2 Q}}$$

Application numérique

• **Maser à hydrogène :**

$f_o = 1{,}42.10^9$ Hz
$T = 300°K$
$Q_a = 2.10^9$
$Q = 2.10^4$
$P = 10^{-12}$ W

$$\lim_{\tau \to 0} I_i(\tau) \simeq 7{,}6.10^{-12}$$

Cette valeur très faible résulte de la valeur élevée du Q atomique due à la longue durée de vie des atomes ($\sim$ 1 seconde).

• **Maser à ammoniac :**

$f_o = 24.10^9$ Hz
$T = 300°K$
$Q_a = 5.10^6$
$Q = 10^4$
$P = 10^{-10}$ W

$$\lim_{\tau \to 0} I_i(\tau) \simeq 1{,}8.10^{-9}$$

V,2. Bruit thermique externe additif

Les effets du bruit thermique externe sont étudiés en combinant additivement le signal issu de la boucle oscillatrice, maintenant supposée sans source de bruit, avec la tension de bruit $n_e(t)$ d'origine thermique prenant naissance dans le circuit externe à la boucle.

La forme de la bande passante du circuit de sortie impose la forme de la densité spectrale $S_{n_e}(f)$.

---

* *Le bruit quantique est négligeable devant le bruit thermique pour les masers, puisque* $h\nu \ll kT$ *en hyperfréquences à la température ambiante (h : constante de Planck).*

Le signal de sortie de l'oscillateur s'écrit :

$$
\begin{aligned}
v_e(t) &= A_o \cos \omega_o t + n_e(t) \\
&= A_o \cos \omega_o t + n_{ep}(t) \cos \omega_o t + n_{eq}(t) \sin \omega_o t \\
&= [A_o + n_{ep}(t)] \cos \omega_o t + n_{eq}(t) \sin \omega_o t \\
&= A_e(t) \cos [\omega_o t + \phi_e(t)]
\end{aligned}
\qquad (106)
$$

avec :

$$
\begin{cases}
A_e^2(t) = [A_o + n_{ep}(t)]^2 + n_{eq}^2(t) & (107) \\
\phi_e(t) = - \operatorname{arctg} \dfrac{n_{eq}(t)}{A_o + n_{ep}(t)} & (108)
\end{cases}
$$

En supposant le rapport signal/ bruit très grand devant l'unité, l'amplitude et la fluctuation de phase instantanées s'écrivent :

$$
\begin{cases}
A_e(t) \simeq A_o \left[1 + \dfrac{n_{ep}(t)}{A_o} \right] & (109) \\
\phi_e(t) \simeq - \dfrac{n_{eq}(t)}{A_o} & (110)
\end{cases}
$$

V,2.1. Instabilité dans le domaine fréquence

La densité spectrale $S_{\phi_e}(f)$ est déterminée en utilisant l'indépendance statistique de $n_{ep}(t)$ et $n_{eq}(t)$ qui permet d'écrire :

$$
\begin{cases}
R_{n_e}(\tau) = R_{n_{eq}}(\tau) \cos 2\pi f_o \tau \\
S_{n_e}(f) = \dfrac{1}{2} \left[S_{n_{eq}}(f + f_o) + S_{n_{eq}}(f - f_o) \right]
\end{cases}
$$

et en imposant une forme particulière pour $S_{n_e}(f)$.

Considérons à titre d'exemple une courbe de Gauss (écart-type σ_s) (fig. 20) :

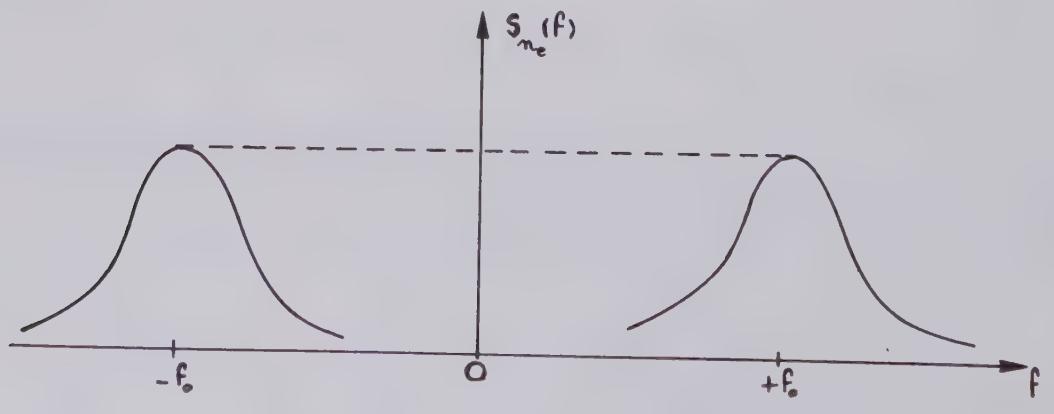


Fig. 20 - Spectre de $n_e(t)$

(111) $$S_{n_e}(f) = \frac{\overline{n_e^2(t)}}{2\sigma_s\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(f+f_o)^2}{2\sigma_s^2}} + e^{-\frac{(f-f_o)^2}{2\sigma_s^2}} \right]$$

(112) $$S_{n_{eq}}(f) = \frac{\overline{n_e^2(t)}}{\sigma_s\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{f^2}{2\sigma_s^2}}$$

Le spectre des fluctuations de phase s'écrit :

(113) $$\boxed{S_{\phi_e}(f) = \frac{\overline{n_e^2(t)}}{A_o^2}\,\frac{1}{\sigma_s\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{f^2}{2\sigma_s^2}}}$$

Le processus aléatoire $\phi_e(t)$ est stationnaire de puissance finie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi_e}(f)\, df = \frac{\overline{n_e^2(t)}}{A_o^2} = \overline{\phi_e^2(t)}$$

V,2.2. Instabilité dans le domaine temps : saturation de $I(\tau)$

La relation (17) permet d'exprimer $I(\tau)$ en fonction de $S_\phi(f)$:

$$I(\tau) = \frac{2}{\omega_o\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f)\, \sin^2 \pi\tau f\, df \right]^{1/2}$$

dans laquelle on reporte l'expression gaussienne (113) :

$$I_e(\tau) = \frac{2}{\omega_o\tau}\left[\frac{\overline{\phi_e^2(t)}}{\sigma_s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{f^2}{2\sigma_s^2}}\, \sin^2 \pi\tau f\, df \right]^{1/2}$$

(114) $$\boxed{I_e(\tau) = \frac{\sqrt{2\,\overline{\phi_e^2(t)}}}{\omega_o\tau}\left[1 - e^{-2\pi^2\sigma_s^2\tau^2} \right]^{1/2}}$$

Valeurs asymptotiques de $I_e(\tau)$

La valeur de l'instabilité à très court terme est :

(115) $$\boxed{\lim_{\tau\to 0} I_e(\tau) = \frac{\sigma_s}{f_o}\sqrt{\overline{\phi_e^2(t)}}}$$

Lorsque $2\pi^2\sigma_s^2\tau^2 \gg 1$, on retrouve la loi classique en τ^{-1} :

(116) $$I_e(\tau) \simeq \frac{\sqrt{2\,\overline{\phi_e^2(t)}}}{\omega_o\tau}$$

qui s'écrit encore, en posant $P_o = A_o^2/2$:

(117)
$$I_e(\tau) \simeq \frac{1}{\omega_o \tau} \sqrt{\frac{\overline{n_e^2(t)}}{P_o}}$$

Cette loi asymptotique pour τ grand est indépendante de la forme de la bande passante du circuit de sortie.

En coordonnées logarithmiques, les asymptotes de $I_e(\tau)$ lorsque $\tau \to 0$ et $\tau \to \infty$ se coupent pour la valeur $\tau_e = 1/\pi\sqrt{2}\sigma_S$ d'autant plus petite que le bruit est à large bande.

V,2.3. *Spectre de radio-fréquences*

Les fluctuations de phase (et de fréquence) étant gaussiennes et stationnaires, le spectre de radio-fréquences peut être déterminé en reportant $I_e(\tau)$ dans la relation (25), ou $S_{\Phi_e}(f)$ dans la relation (29), d'où :

(118)
$$S_{\nu_e}(f) = \frac{A_o^2}{2} e^{-\overline{\Phi_e^2}} \left\{ \delta(f - f_o) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\overline{\Phi_e^2}}{\sigma_S \sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(f-f_o)^2}{2n\sigma_S^2}} \right\}$$

La présence de la composante discrète résulte de la stationnarité des fluctuations de phase ($\overline{\Phi_e^2}$ fini) créées par le bruit thermique externe.

L'étalement du spectre est caractérisé par :

(119)
$$\Sigma_{\nu_e} = f_o\, I_e(0) = \sigma_S \sqrt{\overline{\Phi_e^2(t)}} = \sigma_S \sqrt{\frac{\overline{n_e^2(t)}}{2P_o}}$$

V,3. *Importance relative des bruits thermiques interne et externe dans un oscillateur à quartz*

La comparaison des expressions $I_i(0)$, $I_e(0)$, τ_i et τ_e établies dans ce chapitre, permet de déterminer le bruit prépondérant à court terme dans un oscillateur :

(120)
$$\begin{cases} I_i(0) = \sqrt{\dfrac{\pi k T f_o}{4Q^3 P}} \\ \tau_i = \dfrac{4Q}{\omega_o} \end{cases} \qquad \begin{cases} I_e(0) = \dfrac{\sigma_S}{f_o} \sqrt{\dfrac{\overline{n_e^2(t)}}{2P_o}} \\ \tau_e = \dfrac{1}{\pi\sqrt{2}\,\sigma_S} \end{cases}$$

Dans le cas d'un oscillateur à quartz, on peut considérer les valeurs numériques suivantes :

$f_o = 5.10^6$ Hz ; $T = 10^3$ °K ; $Q = 2.10^6$; $P = 10^{-7}$ W ; $\sigma_S = 100$ Hz ; $\dfrac{\overline{n_e^2(t)}}{P_o} = 2.10^{-9}$

Soit :

$I_i(0) = 2{,}5.10^{-13}$ $\qquad$ $I_e(0) = 6{,}3.10^{-10}$

$\tau_i = 0{,}25$ s $\qquad$ $\tau_e = 2{,}25$ ms

La figure 21 représente la position relative des asymptotes de $I_i(\tau)$ et $I_e(\tau)$, montrant nettement pourquoi le bruit thermique externe impose l'instabilité à cour terme des oscillateurs à quartz.

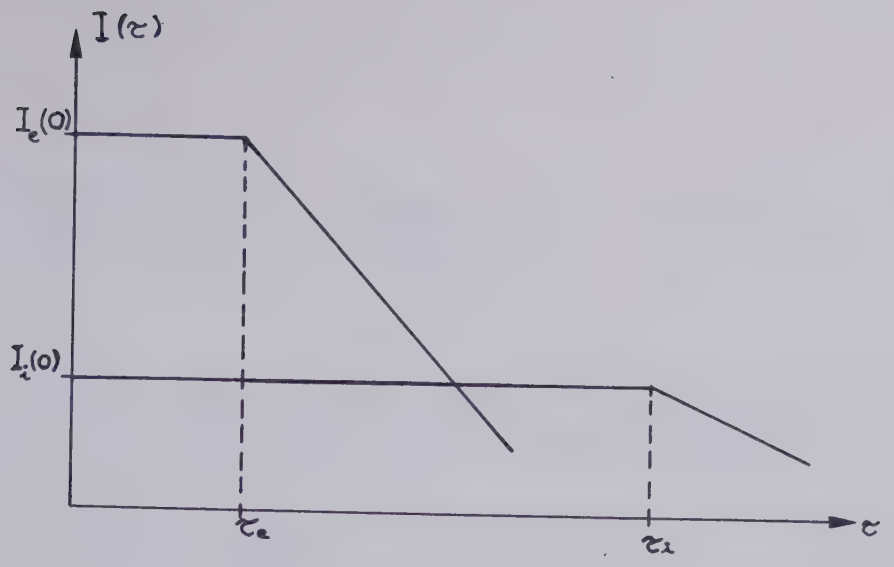


Fig. 21 - Comparaison de $I_e(\tau)$ et $I_i(\tau)$

Les faibles valeurs de $I_i(\tau)$ et l'existence d'un palier de $I(\tau)$ lorsque τ croît (voir chapitre VI), font que $I_i(\tau)$ est généralement inobservable sur un oscillateur à quartz [16].

On remarquera enfin que les quantités $\tau_i I_i(0)$ et $\tau_e I_e(0)$ sont reliées au rapport signal/bruit correspondant :

$$\text{(121)} \quad \tau_i I_i(0) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\omega_0} \sqrt{\frac{P_{Bi}}{P}} \qquad P_{Bi} = kT \frac{F_0}{Q}$$

$$\text{(122)} \quad \tau_e I_e(0) = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{P_{Be}}{P_0}} \qquad P_{Be} = \overline{n_e^2(t)}$$

V,4. Conclusions

L'étude des effets du bruit thermique interne des oscillateurs a montré l'existence d'une limite thermodynamique ultime pour l'instabilité de fréquence à très court terme ($\tau \to 0$).

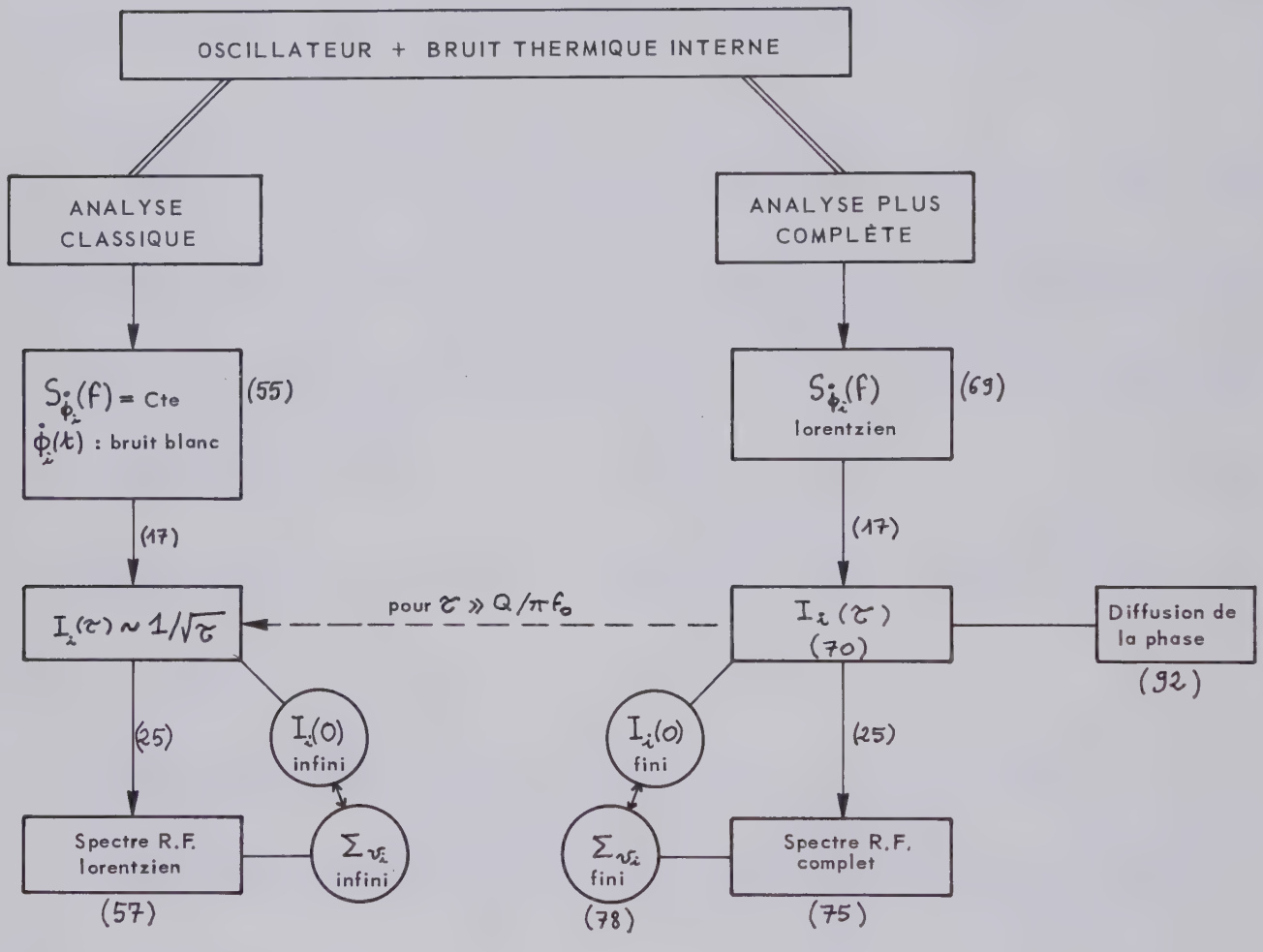
Une relation établie dans la première partie a permis d'en déduire l'expression complète du spectre de radio-fréquences dont les propriétés ont été étudiées.

On a pu ensuite montrer que l'analogie entre la diffusion de la phase et la diffusion du mouvement brownien était complète.

Enfin, un modèle de bruit thermique externe a été étudié.

Les principaux résultats concernant l'étude des effets du bruit thermique interne sont regroupés dans le tableau III.

TABLEAU III - DIAGRAMME DES RÉSULTATS DE L'ÉTUDE DU BRUIT THERMIQUE INTERNE



Chapitre VI
UN MODÈLE ALÉATOIRE STATIONNAIRE DE BRUIT DE FRÉQUENCE EN 1/f

Les déterminations expérimentales de l'instabilité de fréquence, que ce soit dans le domaine temps ou dans le domaine fréquence, mettent en évidence une zone où les valeurs mesurées ne peuvent être interprétées comme résultant des bruits microscopiques additifs.

Un bruit de nature différente voit ses effets devenir prépondérants dans ces zones* qui n'appartiennent pas au domaine typique de l'instabilité à court terme. Ce bruit a pour origine physique les lentes variations de nature macroscopique des valeurs de certains paramètres caractéristiques (par exemple : la fréquence de résonance d'un résonateur).

Ce chapitre propose une approche nouvelle pour l'étude de ce type de bruit usuellement dénommé bruit de scintillation, ou bruit «flicker», ou bruit en $1/f$.

VI,1. Résultats expérimentaux concernant l'instabilité de fréquence

VI,1.1. Domaine temps

Pour de nombreux types d'oscillateurs [4, 16, 35, 36, 37], la courbe expérimentale donnant l'instabilité de fréquence dans le domaine temps possède l'allure représentée sur la figure 22.

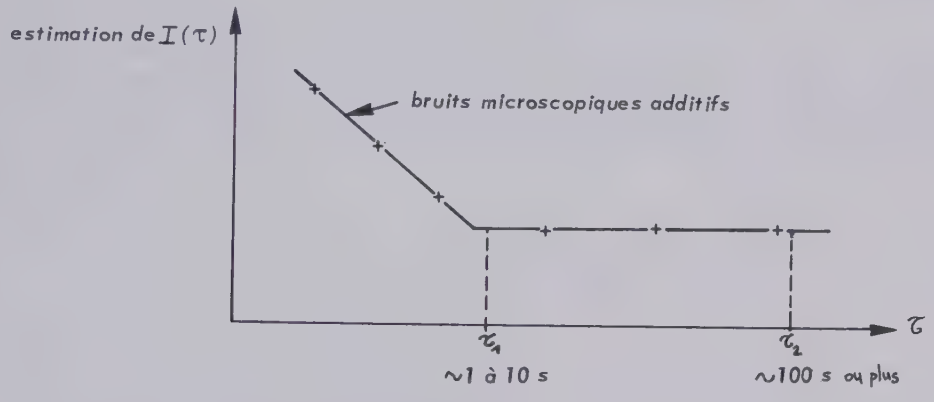


Fig. 22 - Estimation expérimentale de $\mathcal{I}(\tau)$

La partie décroissante résulte de la présence des bruits microscopiques additifs. Si ces bruits existaient seuls, la décroissance se poursuivrait lorsque τ croît au delà de τ_1 .

Le palier observé entre τ_1 et τ_2 prouve l'existence de sources de bruit dont les effets sur les fluctuations de fréquence apparaissent pour $\tau > \tau_1$: ces bruits sont donc à variations lentes vis-à-vis des fluctuations de fréquence d'origine thermique qui prédominent à court terme.

VI,1.2. Domaine fréquence

Les déterminations expérimentales de $S_\phi(f)$ pour de très faibles valeurs de f ($\ll 1$ Hz) donnent des courbes variant sensiblement en $1/f$, sans présenter de saturation pour les valeurs de f actuellement atteintes ($f < 1$ cycle/mois [38, 39, 40]). Cette loi, non explicable à l'aide des bruits thermiques additifs, résulte de l'existence d'une perturbation de la fréquence émise dont les effets n'apparaissent que pour les très faibles valeurs de f , c'est-à-dire une perturbation lente vis-à-vis des fluctuations de fréquence d'origine thermique.

Toutes ces déterminations expérimentales étant effectuées après suppression des effets de la dérive systématique de fréquence, il semble intéressant d'établir un modèle aléatoire *stationnaire* de cette perturbation de

---

* *$\tau > 1$ ou quelques secondes ; $f \ll 1$ Hertz*

fréquence, permettant d'interpréter les résultats expérimentaux. Avant de présenter ce modèle, on rappelle brièvement deux approches classiques de ce problème ; d'autres approches sont étudiées dans les références générales [1 et 2].

VI,2. Approches classiques pour l'étude du bruit de fréquence en 1/f

VI,2.1. Durée totale d'observation finie

Une valeur constante peut être obtenue pour $I(\tau)$, sous certaines conditions, en reportant le spectre $S_{\dot\phi}(f) = A/f$ (A : constante) dans la relation :

$$\sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot\phi}(f)\left(\frac{\sin\pi\tau f}{\pi\tau f}\right)^2 df \qquad (16)$$

Toutefois, cette relation a été démontrée en supposant la stationnarité des fluctuations de fréquence angulaire $\dot\phi(t)$, et l'intégrale diverge pour le spectre A/f. La divergence est évitée en introduisant une durée d'observation totale finie T créant un filtrage passe-haut dont la fréquence de coupure est de l'ordre de $2/T$ [16] ; l'expression (16) s'écrit alors :

$$\omega_o^2 I^2(\tau) = \frac{2A}{\pi}\int_{\frac{2\tau}{T}}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^3}\,dx = \frac{2A}{\pi}\left(1.04 + \frac{1}{2}\log\frac{T}{2\tau} + O\left(\left(\frac{2\tau}{T}\right)^2\right)\right) \qquad (123)$$

$I(\tau)$ est donc constant si l'on maintient constant le rapport T/τ, c'est-à-dire le nombre d'échantillons N choisi pour la détermination de $I(\tau)$; il s'agit donc d'une estimation $I_N(\tau)$ avec $\lim_{N\to\infty} I_N(\tau) = \infty$.

VI,2.2. Modèle de spectre à fréquences de coupures abruptes

Les inconvénients résultant de l'utilisation d'un spectre en A/f (divergence d'intégrales, puissance infinie, autocorrélation non-existante...) sont bien connus, et ont pu être surmontés par l'introduction de fréquences de coupures abruptes[40] conduisant au spectre de la figure 23 :

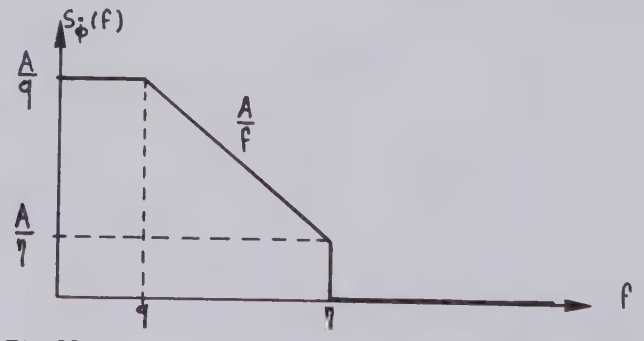


Fig. 23 - Spectre en A/f à fréquences de coupures abruptes

Pour $q\tau \ll 1$, ce spectre (avec $\eta \to \infty$) permet d'établir (γ : constante d'Euler) :

$$\omega_o^2 I^2(\tau) = \sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right] = \frac{A}{\pi}\left(\frac{5}{2} - \gamma + \log 1/q|\tau|\right) \qquad (124)$$

On retrouve la loi logarithmique de l'approche précédente : + Log (1/ fréquence de coupure inférieure × durée d'intégration).

VI,3. Nouvelle approche à l'aide d'un modèle stationnaire

Les deux approches précédentes prennent pour point de départ un modèle de spectre (A/f ; A/f tronqué) sans préciser la nature du processus aléatoire qui en est à l'origine.

Notre approche a pour point de départ un modèle temporel aléatoire pour les fluctuations de la fréquence émise, dont les propriétés statistiques seront déterminées pour rendre compte du palier de $I(\tau)$ et du spectre en A/f .

Les causes physiques du bruit «flicker» de fréquence sont les variations lentes et aléatoires d'origine macroscopique, des différents paramètres dont dépend la fréquence moyenne émise ; ces variations créent une modulation de la fréquence moyenne que nous représenterons par un modèle à sauts de fréquence aléatoirement distribués dans le temps, et dont nous précisons maintenant les propriétés statistiques.

VI,3.1. Structure générale du modèle à sauts de fréquence

La fréquence angulaire instantanée de l'oscillateur sera représentée par :

(125)
$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\phi}_c(t) + \dot{\phi}_D(t)$$

$\dot{\phi}_c(t)$ est le processus aléatoire gaussien créé par les bruits thermiques additifs ;

$\dot{\phi}_D(t)$ est un processus aléatoire stationnaire discontinu représentant les sauts de la fréquence moyenne de l'oscillateur (fig. 24).

Les valeurs de $\dot{\phi}_D(t)$ avant et après un saut sont supposées statistiquement indépendantes.

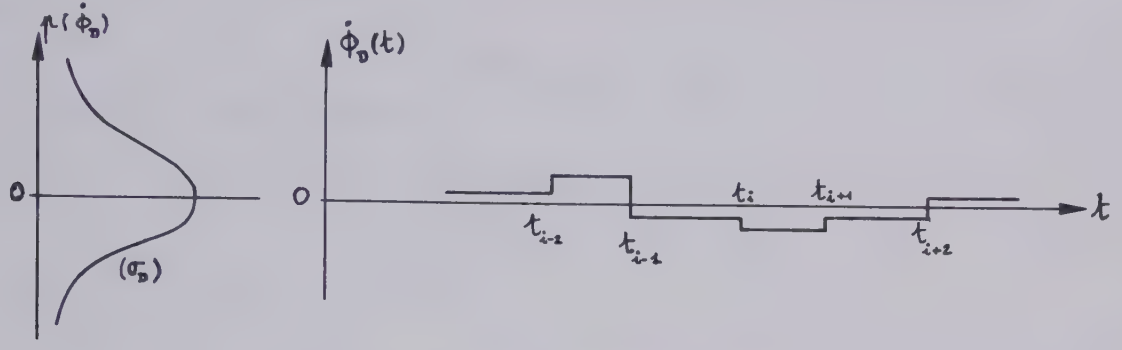


Fig. 24 - Processus aléatoire discontinu

Les propriétés statistiques de $\dot{\phi}_D(t)$ sont entièrement déterminées par la connaissance de :

1) la densité de probabilité $p(\dot{\phi}_D)$ de la valeur de $\dot{\phi}_D(t)$ entre deux sauts, caractérisée par son écart-type σ_D (et sa moyenne nulle) ;

2) la loi de distribution des instants de sauts $\{t_i\}$.

La fonction d'autocorrélation de $\dot{\phi}_D(t)$ nous permettra de calculer $S_{\dot{\phi}_D}(f)$ puis $I_D(\tau)$ (D pour discontinu).

Calcul de la fonction d'autocorrélation $R_{\dot{\phi}_D}(\tau)$

La statistique des instants de saut est déterminée par les probabilités : Prob (N, τ) ≡ probabilité pour avoir N sauts pendant une durée τ ($N = 0, 1, 2, 3...$).

La fonction d'autocorrélation s'écrit :

(126)
$$R_{\dot{\phi}_D}(\tau) = E[\dot{\phi}_D(t)\,\dot{\phi}_D(t+\tau)]$$

avec deux cas possibles :

1) aucun saut n'a eu lieu entre les instants t et $t+\tau$, avec une probabilité Prob ($0, \tau$) ;

2) au moins un saut a eu lieu entre t et $t+\tau$, avec une probabilité 1 − Prob ($0, \tau$).

Dans le premier cas :

$$R_{\dot{\phi}_D}(\tau) = E[\dot{\phi}_D^2(t)]$$

Dans le second cas :

$$R_{\dot{\phi}_D}(\tau) = E[\dot{\phi}_D(t)] \cdot E[\dot{\phi}_D(t+\tau)]$$
$$= E^2[\dot{\phi}_D(t)]$$

puisque $\dot{\phi}_D(t)$ et $\dot{\phi}_D(t+\tau)$ sont indépendants.

En tenant compte des probabilités respectives :

$$R_{\dot\phi_D}(\tau) = \text{Prob}(0,\tau) \cdot E[\dot\phi_D^2(t)] + (1 - \text{Prob}(0,\tau)) \cdot E^2[\dot\phi_D(t)]$$

Le processus $\dot\phi_D(t)$ étant de moyenne nulle :

$$E^2[\dot\phi_D(t)] = 0$$

et l'autocorrélation s'écrit :

(127) $$\boxed{R_{\dot\phi_D}(\tau) = \sigma_D^2 \cdot \text{Prob}(0,\tau)}$$

où σ_D est l'écart-type de $\dot\phi_D(t)$. L'autocorrélation, et donc la densité spectrale $S_{\dot\phi_D}(f)$, sont indépendantes de la forme exacte de $p(\dot\phi_D)$ qui n'aura pas à être précisée, ce qui donne une grande généralité au modèle. Seule la loi Prob ($0, \tau$) interviendra dans la détermination de $S_{\dot\phi_D}(f)$.

Ce modèle de bruit «flicker» repose sur le choix de cette loi.

VI,3.2. Premier cas : distribution de Poisson des instants de sauts

La loi la plus commune dans les problèmes où intervient une distribution aléatoire d'instants, est la distribution de Poisson caractérisée par :

(128) $$\boxed{\text{Prob}(N,\tau) = \frac{(q\tau)^N}{N!} e^{-q\tau}}$$

(q représente le nombre moyen de sauts par unité de temps).

La variable aléatoire x représentant la durée entre deux sauts successifs a pour densité de probabilité [43] :

$$p(x) = q\, e^{-qx}$$

La durée moyenne entre deux sauts successifs est :

$$\overline{x} = \int_0^{+\infty} x\, p(x)\, dx = 1/q$$

Dans le cas de la distribution de Poisson :

(129) $$R_{\dot\phi_D}(\tau) = \sigma_D^2\ e^{-q|\tau|}$$

d'où, par Transformée de Fourier, un spectre lorentzien :

(130) $$\boxed{S_{\dot\phi_D}(f) = \frac{2q\sigma_D^2}{q^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

et l'instabilité de fréquence (cf. équation 17)

(131) $$\boxed{I_D^2(\tau) = \frac{2\sigma_D^2}{\omega_o^2 q\tau}\left[1 - \frac{1}{q\tau} + \frac{1}{q\tau}\, e^{-q\tau}\right]}$$

- Pour $\tau \ll q^{-1}$, on a sensiblement $I_D(\tau) \simeq \sigma_D / \omega_o$.
- Pour $\tau \gg q^{-1}$, $I_D(\tau) \sim \tau^{-\frac{1}{2}}$ tend vers zéro lorsque $\tau \to \infty$ en accord avec la stationnarité du modèle.

Le palier de $I(\tau)$ peut être interprété en faisant deux hypothèses sur les ordres de grandeurs relatifs de $\dot{\phi}_c(t)$ et de $\dot{\phi}_D(t)$.

• **1e hypothèse :** $\sigma_D \ll \sigma_c$ $\quad \left(\sigma_c = \left(\overline{\dot{\phi}_c^2(t)} \right)^{1/2} \right)$

L'amplitude des sauts est très faible devant l'amplitude des fluctuations d'origine thermique (fig. 25a). Cette hypothèse est raisonnable avec les divers composants de très haute qualité utilisés dans les étalons de fréquence, et se traduit par le fait que le palier de $I(\tau)$ a des valeurs numériques très faibles (voir IV,3).

a. sauts imperceptibles

b. sauts importants

Fig. 25 - Comparaison de $\dot{\phi}_D(t)$ et $\dot{\phi}_c(t)$

• **2e hypothèse :** $\tau_D \gg \tau_c$

où τ_D et τ_c sont respectivement les temps de corrélation de $\dot{\phi}_D(t)$ et $\dot{\phi}_c(t)$. Cette hypothèse traduit la nature lente des variations de $\dot{\phi}_D(t)$ vis-à-vis de celles de $\dot{\phi}_c(t)$.

Les courbes $I_c(\tau)$ et $I_D(\tau)$ sont alors représentées sur la figure 26 :

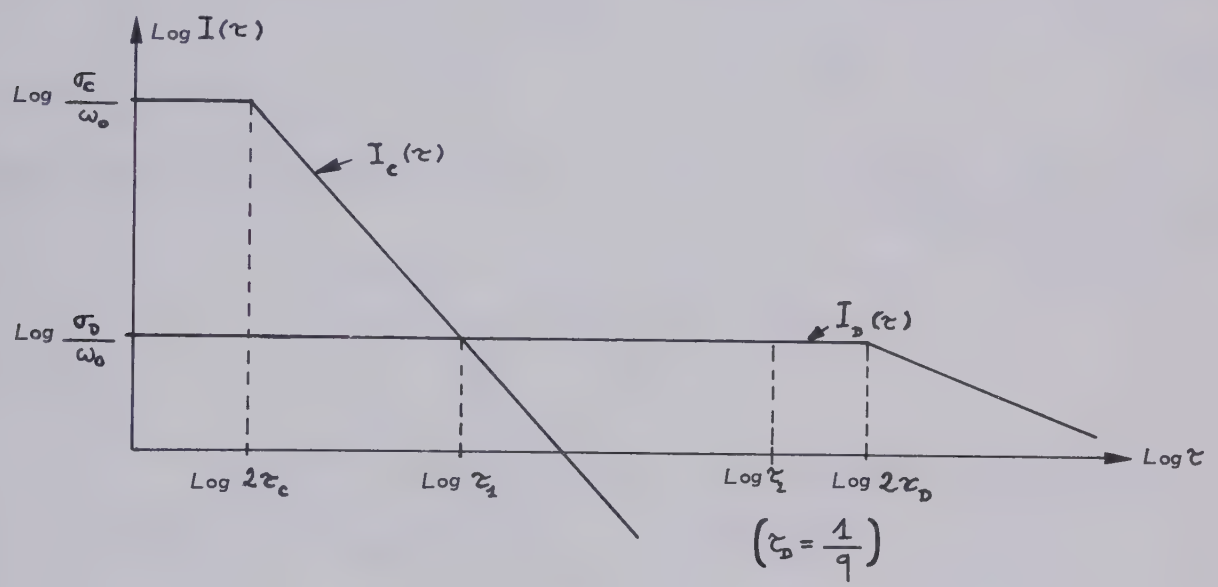


Fig. 26 - Origine du palier de $I(\tau)$

Leur position relative permet d'interpréter la présence du palier observé dans l'intervalle $\tau_1 < \tau < \tau_2$. Pour $\tau > \tau_2$, on ne dispose généralement pas de données expérimentales statistiquement significatives à cause des longues durées nécessaires aux expériences ; aussi la décroissance de $I_D(\tau)$ ne peut elle pas être observée.

Conclusions

Ce premier modèle utilisant la loi de Poisson permet d'interpréter le palier observé sur la courbe $I(\tau)$ Il n'est toutefois pas satisfaisant dans le domaine fréquence car :

(132) $$S_{\dot{\phi}_D}(f) = \frac{\text{Constante}}{f^2} \qquad \text{pour } f \gg q/2\pi$$

alors que les spectres expérimentaux sont plus proches de la loi $1/f$.

Nous sommes alors amenés à choisir une autre loi pour la distribution des instants de saut.

VI,3.3. Second cas : distribution des instants de saut donnant les propriétés du bruit en 1/f

En conservant la même structure générale du modèle à sauts de fréquence, le choix d'une loi appropriée pour Prob ($0, \tau$) permet d'obtenir les propriétés du bruit «flicker» de fréquence [41].

VI,3.3.1. Instabilité dans le domaine fréquence

Une loi possible est suggérée par la relation [22] :

$$(133) \qquad (q|\tau|)^{\varepsilon} K_{\varepsilon}(q|\tau|) = \sqrt{\pi}\, 2^{\varepsilon}\, \Gamma(\varepsilon+\tfrac{1}{2})\, q^{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i 2\pi \tau f}}{(q^2 + 4\pi^2 f^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\, df$$

($K_{\varepsilon}(x)$: fonction de Bessel modifiée de seconde espèce, d'ordre $\varepsilon \geq 0$), et par le fait que l'expression :

$$(134) \qquad \boxed{S_{\dot{\phi}_D}(f) = \frac{2\pi A\, q^{2\varepsilon}}{(q^2 + 4\pi^2 f^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}} \qquad (A : \text{constante} \; ; \; \varepsilon > 0)$$

peut effectivement représenter la densité spectrale de puissance d'un processus stationnaire à puissance finie :

$$(135) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}_D}(f)\, df = \frac{A\sqrt{\pi}\, \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})}$$

(Toutefois : $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}_D}(f)\, df = \infty$ comme il est normal pour un spectre en $1/f$ sans fréquence de coupure supérieure).

Pour $f \gg q/2\pi$ et $0 < \varepsilon \ll 1$, ce spectre a pour expression approchée :

$$\boxed{S_{\dot{\phi}_D}(f) \simeq \frac{A}{f}}$$

La relation (133) permet de calculer la fonction d'autocorrélation de $\dot{\phi}_D(t)$:

$$(136) \qquad R_{\dot{\phi}_D}(\tau) = \frac{2^{1-\varepsilon}\sqrt{\pi}\, A}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})} \cdot (q|\tau|)^{\varepsilon} K_{\varepsilon}(q|\tau|)$$

d'où la loi :

$$(137) \qquad \boxed{\text{Prob}(0,\tau) = \frac{R_{\dot{\phi}_D}(\tau)}{R_{\dot{\phi}_D}(0)} = \frac{1}{2^{\varepsilon-1}\Gamma(\varepsilon)} (q|\tau|)^{\varepsilon} K_{\varepsilon}(q|\tau|)}$$

$$(138) \qquad R_{\dot{\phi}_D}(0) = \sigma_D^2 = \frac{A\sqrt{\pi}\, \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})}$$

REMARQUE : Le modèle à loi de Poisson est un cas particulier de ce modèle plus général, obtenu en faisant $\varepsilon = \frac{1}{2}$;

en effet : $x^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-x}$ d'où :

$$Prob\,(0,\tau) = \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; e^{-q|\tau|} = e^{-q|\tau|}$$

VI,3.3.2. Instabilité dans le domaine temps : palier et loi logarithmique de I (τ)

Le calcul de l'instabilité dans le domaine temps est aisé à partir de la relation [16] :

$$\omega_o^2\, I^2(\tau) = \sigma^2[\langle \dot\phi \rangle_{t,\tau}] = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau R_{\dot\phi}(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{\tau}\right) dx \qquad (139)$$

Une expression approchée de $R_{\dot\phi_D}(\tau)$ valable pour $q|\tau| \ll 1$ et $0 < \varepsilon \ll 1$ s'écrit (voir annexe N° 5) :

$$R_{\dot\phi_D}(\tau) \simeq \frac{A\sqrt{\pi}\,\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})} \cdot \left[1 - \left(\frac{q|\tau|}{2}\right)^{2\varepsilon} \cdot (1+2\gamma\varepsilon)\right] \qquad (140)$$

($\gamma = 0{,}5572\ldots$: constante d'Euler)

Son report dans l'équation (139) donne :

$$\sigma^2[\langle \dot\phi \rangle_{t,\tau}] = \frac{2\sigma_D^2}{\tau} \left\{ \int_0^\tau dx - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau x\,dx - (1+2\gamma\varepsilon)\left(\frac{q}{2}\right)^{2\varepsilon} \int_0^\tau x^{2\varepsilon}\,dx \right.$$

$$\left. + (1+2\gamma\varepsilon)\left(\frac{q}{2}\right)^{2\varepsilon} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x^{1+2\varepsilon}\,dx \right\}$$

$$= \frac{2\sigma_D^2}{\tau}\left\{\tau - \frac{\tau}{2} - (1+2\gamma\varepsilon)\left(\frac{q}{2}\right)^{2\varepsilon} \frac{\tau^{2\varepsilon+1}}{2\varepsilon+1} + (1+2\gamma\varepsilon)\left(\frac{q}{2}\right)^{2\varepsilon} \frac{1}{\tau}\,\frac{\tau^{2+2\varepsilon}}{2+2\varepsilon}\right\}$$

$$= \sigma_D^2 \left\{ 1 - \left(\frac{q\tau}{2}\right)^{2\varepsilon} \cdot \left[\frac{2(1+2\gamma\varepsilon)}{2\varepsilon+1} - \frac{1+2\gamma\varepsilon}{1+\varepsilon}\right]\right\}$$

Soit, en ne conservant que les termes du premier ordre en ε :

$$\omega_o^2\, I_D^2(\tau) = \frac{\sqrt{\pi} A\,\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})} \left\{ 1 - \left(\frac{q|\tau|}{2}\right)^{2\varepsilon} \cdot \left[1 + \varepsilon(2\gamma - 3)\right]\right\} \qquad (141)$$

(142) $$\omega_o^2 \, I_D^2(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}\, A\, \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})} \cdot \left\{ 1 - e^{2\varepsilon \operatorname{Log} \frac{q|\tau|}{2}} \cdot \left[1 + \varepsilon(2\gamma - 3) \right] \right\}$$

(143) $$\lim_{\tau \to 0} I_D(\tau) = \frac{1}{\omega_o} \left[\frac{\sqrt{\pi}\, A\, \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})} \right]^{1/2} = \frac{\sigma_D}{\omega_o}$$

Pour une valeur donnée de ε $(0 < \varepsilon \ll 1)$, considérons les variations de $I_D(\tau)$ avec τ ($\tau \ll 1/q$) :

• **1e zone** : pour $\left| 2\varepsilon \operatorname{Log} \frac{q|\tau|}{2} \right| \gg 1$, soit $\tau \ll \frac{2}{q}\, e^{-\frac{1}{2\varepsilon}}$, il vient :

$$\omega_o^2 \, I_D^2(\tau) \simeq \frac{\sqrt{\pi}\, A\, \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})}$$

$I_D(\tau)$ est indépendant de τ et égal à $I_D(0) = \sigma_D / \omega_o$.

• **2e zone** : pour $\left| 2\varepsilon \operatorname{Log} \frac{q|\tau|}{2} \right| \ll 1$, soit $\tau \gg \frac{2}{q}\, e^{-\frac{1}{2\varepsilon}}$, il vient :

$$\omega_o^2 \, I_D^2(\tau) \simeq \frac{\sqrt{\pi}\, A\, \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})} \left\{ 1 - \left(1 - \left| 2\varepsilon \operatorname{Log} \frac{q|\tau|}{2} \right| \right) \cdot \left(1 + \varepsilon(2\gamma - 3) \right) \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\, A\, \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})} \left\{ \varepsilon \cdot \left(3 - 2\gamma - 2 \operatorname{Log} \frac{q|\tau|}{2} \right) \right\}$$

(144) $$\omega_o^2 \, I_D^2(\tau) \simeq \frac{\sqrt{\pi}\, A\, \Gamma(\varepsilon+1)}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})} \left(3 - 2\gamma - 2 \operatorname{Log} \frac{q|\tau|}{2} \right)$$

$$\left(\varepsilon\, \Gamma(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon+1) \right)$$

Ce modèle permet de retrouver la loi logarithmique [16, 39, 40, 42] :

$$+ \operatorname{Log} (1/\text{fréquence de coupure} \times \text{durée d'intégration})$$

En passant à la limite $\varepsilon \to 0$, $I_D(\tau)$ possède le comportement logarithmique des équations (123) et (124) :

(145) $$\left(\omega_o^2 \, I_D^2(\tau) \right)_{\varepsilon \to 0} = A \left(3 - 2\gamma - 2 \operatorname{Log} \frac{q|\tau|}{2} \right)$$

En outre, pour $\varepsilon \neq 0$, la stationnarité du modèle entraîne :

$$\lim_{\tau \to \infty} I_p(\tau) = 0$$

VI,3.3.3. Durée moyenne entre deux sauts successifs

La probabilité pour que au moins un saut se produise dans un intervalle de temps τ vaut :

$$P(\tau) = 1 - \text{Prob}(0,\tau)$$

avec pour densité de probabilité :

(146) $$p(\tau) = \frac{dP(\tau)}{d\tau} = -\frac{d}{d\tau}\text{Prob}(0,\tau)$$

La valeur moyenne de τ s'écrit alors :

(147) $$\bar{\tau} = \int_0^\infty \tau\, p(\tau)\, d\tau = -\int_0^\infty \tau \cdot \frac{d\,\text{Prob}(0,\tau)}{d\tau}\, d\tau$$

En intégrant par parties :

$$\bar{\tau} = \left[-\tau\,\text{Prob}(0,\tau)\right]_0^\infty + \int_0^\infty \text{Prob}(0,\tau)\, d\tau$$

Soit :

(148) $$\boxed{\bar{\tau} = \int_0^\infty \text{Prob}(0,\tau)\, d\tau}$$

Appliquons cette relation à la loi (137).

L'inversion de la relation (133) donne :

$$\frac{1}{(q^2 + 4\pi^2 f^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^\varepsilon\, \Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})\, q^{2\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} (q|\tau|)^\varepsilon\, K_\varepsilon(q|\tau|) \cdot e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau$$

en faisant $f = 0$:

$$\frac{1}{q^{1+2\varepsilon}} = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})\, q^{2\varepsilon}} \int_0^{+\infty} \frac{(q|\tau|)^\varepsilon\, K_\varepsilon(q|\tau|)}{2^{\varepsilon-1}\,\Gamma(\varepsilon)}\, d\tau$$

D'où :

(149) $$\boxed{\bar{\tau} = \frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})}{q\,\Gamma(\varepsilon)}}$$

Lorsque $\varepsilon \ll 1$, on a l'expression approchée :

(150) $$\boxed{\bar{\tau} \simeq \frac{\varepsilon\,\pi}{q}}$$

VI,4. Conclusion sur cette approche

Ce modèle aléatoire à saut de fréquence présente des avantages et des inconvénients, comme tout modèle visant à expliquer des résultats expérimentaux dont les origines physiques sont mal connues.

L'inconvénient majeur est la part d'arbitraire qui intervient dans le choix de la structure du modèle : le modèle à saut de fréquence n'est toutefois pas physiquemènt irréaliste. La justification des propriétés statistiques (loi (137)) à partir de phénomènes physiques de base est également un point fondamental, mais très complexe dans la mesure où on ne connait pas bien ces phénomènes physiques de nature macroscopique.

Par contre, ce modèle présente l'avantage de donner une « image » temporelle possible d'une perturbation de fréquence conduisant aux propriétés « flicker » rencontrées dans les mesures de l'instabilité de fréquence.

Il évite en outre les difficultés (mathématiques et d'interprétation physique) associées à l'utilisation d'une densité spectrale en $1/f$ pour tout f .

Il montre enfin qu'il n'est pas indispensable de recourir aux processus instationnaires pour obtenir un spectre voisin de $1/f$ au-dessus d'une certaine fréquence de coupure, qui est ici une caractéristique intrinsèque du modèle.

Troisième Partie
LE GÉNÉRATEUR SINUSOÏDAL EN TANT QU'ÉTALON DE FRÉQUENCE

La troisième partie est consacrée à l'étude de différents problèmes relatifs à l'aspect étalon de fréquence des générateurs sinusoïdaux ; il y sera principalement question de l'instabilité de fréquence dans le domaine temps : utilisation du paramètre $\mathbb{I}(\tau)$ à la détermination de la précision des mesures de fréquence et estimation expérimentale de $\mathbb{I}(\tau)$.

Chapitre VII
INTERPRÉTATION DES PARAMÈTRES $I(\tau)$ et $\tau I(\tau)$

Le paramètre théorique $\mathbb{I}(\tau)$ a été largement utilisé dans les chapitres précédents pour caractériser les fluctuations de fréquence d'un oscillateur.

Le problème abordé dans la première section de ce chapitre est posé différemment, et concerne l'interprétation de $\mathbb{I}(\tau_0)$ lorsqu'un expérimentateur dispose d'une durée totale τ_0 pour déterminer la fréquence d'un oscillateur dont il connaîtrait la courbe théorique $\mathbb{I}(\tau)$.

La relation entre le spectre de radio-fréquences et l' instabilité dans le domaine temps a fait apparaître le paramètre $\tau\mathbb{I}(\tau)$; son interprétation en tant que caractérisation de l'instabilité de fréquence sera précisée dans la seconde section de ce chapitre.

VII,1. Détermination d'une fréquence pendant une durée totale finie τ_0

Une durée totale τ_0 disponible pour effectuer (par des mesures de fréquence) la détermination de la fréquence d'un oscillateur est utilisable de différentes manières ; les deux cas extrêmes consistent, soit à effectuer une mesure unique de durée τ_0 , soit à effectuer N mesures adjacentes de durée τ_1 telles que $N\tau_1 = \tau_0$. Le paramètre $\mathbb{I}(\tau)$ sera utilisé pour définir un critère de précision* permettant de montrer, selon le choix de N et selon le type de bruit prépondérant, quelle est la méthode la plus précise.

VII,1.1. Interprétation de $I(\tau_0)$ lors d'une mesure de fréquence de durée τ_0

La fréquence angulaire instantanée étant représentée par le processus stationnaire gaussien $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\phi}(t)$, une mesure effectuée entre les instants t_i et $t_i + \tau$ donne la valeur

$$(151) \qquad \langle \omega(t) \rangle_{t_i,\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_i+\tau} \omega(t)\, dt = \omega_0 + \langle \dot{\phi}(t) \rangle_{t_i,\tau}$$

---

* *Il s'agit de la précision théorique liée aux fluctuations de fréquence de l' oscillateur ; l'instrument de mesure sera supposé parfait.*

qui est un échantillon de la variable aléatoire gaussienne $\langle \omega(t) \rangle_{t,\tau}$, (qui sera notée ω_τ), dont la densité de probabilité s'écrit :

$$p(\omega_\tau) = \frac{1}{\sigma(\tau)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega_\tau - \omega_0)^2}{2\sigma^2(\tau)}} \qquad (152)$$

Par définition de $I(\tau)$, l'écart-type $\sigma(\tau)$ est (fig. 27) :

$$\sigma(\tau) = \omega_0 I(\tau) = \sigma[\langle \omega(t) \rangle_{t,\tau}] \qquad (153)$$

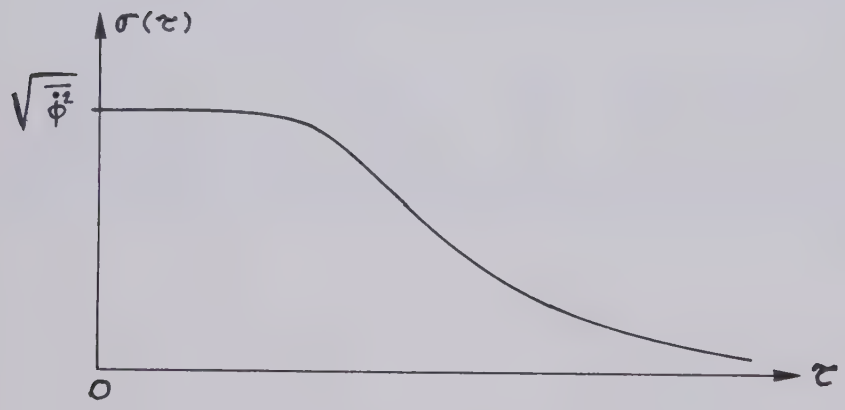


Fig. 27 - Ecart-type de $\langle \omega(t) \rangle_{t,\tau}$

Une mesure unique de durée τ conduit, selon la valeur de τ , aux densités de probabilité représentées sur la figure 28.

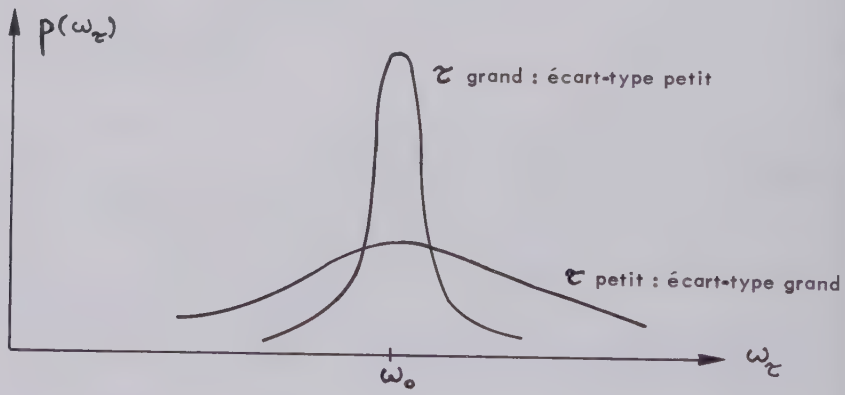


Fig. 28 - Densité de probabilité $p(\omega_\tau)$

La signification de $I(\tau)$ lors d'une mesure de fréquence de durée τ , permet d'établir un critère de précision qui sera utilisé pour choisir, parmi les deux méthodes envisagées, la plus précise.

VII,1.2. Un critère de précision de la détermination d'une fréquence

La précision d'une détermination de fréquence sera caractérisée par la longueur de l'intervalle de fréquence J , dans lequel la probabilité de trouver la valeur moyenne ω_0 correspondant à l'oscillateur sans bruit, est égale à 0,997* (fig. 29).

La localisation de la valeur centrale Ω_c de J est faite à partir du ou des résultats expérimentaux. La longueur de J est calculée à l'aide de $I(\tau)$, τ étant la durée de chaque mesure effectuée.

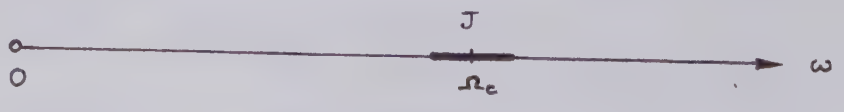


Fig. 29 - Intervalle J

* Pour une loi gaussienne $p(\omega)$ centrée sur ω_0 , d'écart-type σ : $\int_{\omega_0-3\sigma}^{\omega_0+3\sigma} p(\omega)\, d\omega = 0{,}997.$

C'est la nature aléatoire des fluctuations de fréquence qui entraîne l'utilisation de la notion de probabilité dans le critère de précision.

VII,1.3. Deux utilisations possibles d'une durée totale de mesure τ_0

Le critère défini précédemment permet d'établir, parmi les deux méthodes suivantes, la plus précise (celle qui donne l'intervalle J le plus court).

VII,1.3.1. Première méthode : une mesure unique de durée τ_0

Dans ce cas très simple, l'écart-type de $p(\omega_{\tau_0})$ est égal à $\sigma(\tau_0) = \omega_0 I(\tau_0)$; la probabilité pour que la valeur mesurée ω_{exp} soit dans l'intervalle $[\omega_0 - 3\sigma(\tau_0) ; \omega_0 + 3\sigma(\tau_0)]$ est égale à 0,997. De façon équivalente, on a une probabilité égale pour que la valeur moyenne ω_0 soit dans l'intervalle :

$$J_1 \equiv [\omega_{exp} - 3\sigma(\tau_0) ; \omega_{exp} + 3\sigma(\tau_0)]$$

La précision de la mesure unique de durée τ_0 est donnée par la longueur de J_1 :

(154)
$$\boxed{|J_1| = 6\sigma(\tau_0) = 6\omega_0 I(\tau_0)}$$

VII,1.3.2. Seconde méthode : N mesures adjacentes de durée τ_1 ($N\tau_1 = \tau_0$)

La durée totale de mesure τ_0 est maintenant exploitée en effectuant N mesures adjacentes, chacune de durée $\tau_1 = \tau_0/N$ (fig. 30).

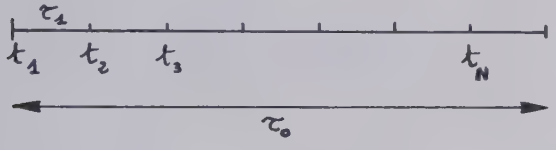


Fig. 30 - N mesures de durée τ_1

Un échantillon de N valeurs $(\omega_{\tau_1})_i$, $i = 1$ à N, permet de définir une nouvelle variable aléatoire gaussienne

(155)
$$\overline{\omega_{\tau_1}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\omega_{\tau_1})_i$$

dont l'espérance mathématique est $E[\overline{\omega_{\tau_1}}] = \omega_0$, et l'écart-type $\Sigma(N,\tau_1)$. Le calcul de $\Sigma(N,\tau_1)$ permettra de déterminer la longueur de l'intervalle J_2 utilisée comme critère de précision.

Les N déterminations de la variable aléatoire $\langle \omega(t) \rangle_{t_i,\tau_1}$ permettent de calculer la valeur centrale de J_2 :

(156)
$$\overline{\omega_{\tau_1}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \langle \omega(t) \rangle_{t_i,\tau_1} = \omega_0 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \langle \dot{\phi}(t) \rangle_{t_i,\tau_1}$$

$$= \omega_0 + \frac{1}{N\tau_1} \sum_{\lambda=1}^{N} \int_{t_i}^{t_i+\tau_1} \dot{\phi}(\theta)\, d\theta$$

$$= \omega_0 + \frac{1}{\tau_0} \int_{t_1}^{t_1+\tau_0} \dot{\phi}(\theta)\, d\theta$$

$$= \langle \omega(t) \rangle_{t_1,\tau_0}$$

qui est évidemment égale à celle de J_1 (si la première méthode avait été utilisée de t_1 à $t_1+\tau_0$).

Calculons l'écart-type $\Sigma(N, \tau_1)$, connaissant l'écart-type $\sigma(\tau_1) = \omega_0 I(\tau_1)$ de la variable aléatoire ω_{τ_1} :

$$\Sigma^2(N,\tau_1) = E[(\bar{\omega}_{\tau_1})^2] - \left(E[\bar{\omega}_{\tau_1}]\right)^2$$

$$= E[(\bar{\omega}_{\tau_1})^2] - \omega_0^2$$

avec

$$(\bar{\omega}_{\tau_1})^2 = \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\omega_{\tau_1})_i\,(\omega_{\tau_1})_j\right)$$

$$E[(\bar{\omega}_{\tau_1})^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}E[(\omega_{\tau_1})_i\,(\omega_{\tau_1})_j]$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=j=1}^{N}E[(\omega_{\tau_1})_i^2] + \frac{2}{N^2}\sum_{i<j=1}^{N}\sum E[(\omega_{\tau_1})_i\,(\omega_{\tau_1})_j]$$

$$= \frac{\omega_0^2}{N} + \frac{\sigma^2[\langle\dot{\phi}\rangle_{t,\tau_1}]}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{i<j=1}^{N}\sum E[(\omega_{\tau_1})_i\,(\omega_{\tau_1})_j]$$

soit :

$$\Sigma^2(N,\tau_1) = \omega_0^2\left(\frac{1}{N}-1\right) + \frac{\sigma^2[\langle\dot{\phi}\rangle_{t,\tau_1}]}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{i<j=1}^{N}\sum E[(\omega_{\tau_1})_i\,(\omega_{\tau_1})_j] \qquad (157)$$

Le dernier terme, représentant la corrélation entre les différents échantillons, s'écrit* :

$$\frac{2}{N^2}\sum_{i<j=1}^{N}\sum E\left[\left(\omega_0 + \langle\dot{\phi}\rangle_{t_i,\tau_1}\right)\cdot\left(\omega_0 + \langle\dot{\phi}\rangle_{t_j,\tau_1}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{N^2}\sum_{i<j=1}^{N}\sum\left(\omega_0^2 + E\left[\langle\dot{\phi}\rangle_{t_i,\tau_1}\,\langle\dot{\phi}\rangle_{t_j,\tau_1}\right]\right) \qquad (158)$$

$$= \left(1-\frac{1}{N}\right)\omega_0^2 + \frac{2}{N^2}\sum_{i<j=1}^{N}\sum E\left[\langle\dot{\phi}\rangle_{t_i,\tau_1}\,\langle\dot{\phi}\rangle_{t_j,\tau_1}\right]$$

L'écart-type $\Sigma(N,\tau_1)$ est alors :

$$\Sigma^2(N,\tau_1) = \frac{\omega_0^2\, I^2(\tau_1)}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{i<j=1}^{N}\sum E\left[\langle\dot{\phi}\rangle_{t_i,\tau_1}\,\langle\dot{\phi}\rangle_{t_j,\tau_1}\right] \qquad (159)$$

---

* *Il a y* $\frac{N^2-N}{2}$ *termes dans la somme double .*

où la somme double se calcule à l'aide de l'expression (183)

$$2\,E\left[\langle\dot\phi\rangle_{t_i,\tau_1}\,\langle\dot\phi\rangle_{t_j,\tau_1}\right] = \frac{2}{\tau_1^2}\int_{t_i}^{t_i+\tau_1}\int_{t_j}^{t_j+\tau_1} R_{\dot\phi}(\theta_1-\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2 \qquad (t_i<t_j)$$

$$= -\frac{2}{\tau_1^2}\,U(t_j-t_i) + \frac{1}{\tau_1^2}\,U(t_j-t_i-\tau_1) + \frac{1}{\tau_1^2}\,U(t_j-t_i+\tau_1)$$

$$\left(\,U(\tau) = \tau^2\,\sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right] = \omega_o^2\,\tau^2\,I^2(\tau)\,\right)$$

Le calcul développé au paragraphe VIII,3 donne :

$$\sum_{i<j=1}^{N}\left\{-2\,U(t_j-t_i) + U(t_j-t_i-\tau_1) + U(t_j-t_i+\tau_1)\right\} =$$

$$= -N\,U(\tau_1) + U(N\tau_1)$$

$$= -N\,U(\tau_1) + U(\tau_o)$$

$$= -N\,\omega_o^2\,\tau_1^2\,I^2(\tau_1) + \omega_o^2\,\tau_o^2\,I^2(\tau_o)$$

soit enfin :

$$\Sigma^2(N,\tau_1) = \frac{\omega_o^2\,I^2(\tau_1)}{N} - \frac{N\,\omega_o^2\,\tau_1^2\,I^2(\tau_1)}{N^2\,\tau_1^2} + \frac{\omega_o^2\,\tau_o^2\,I^2(\tau_o)}{N^2\,\tau_1^2}$$

(160)
$$\boxed{\Sigma(N,\tau_1) = \omega_o\,I(\tau_o) = \sigma(\tau_o)}$$

Les N mesures de la seconde méthode fournissent donc un échantillon de la variable aléatoire gaussienne $\overline{\omega}_{\tau_1}$ qui a une probabilité égale à 0,997 d'être dans l'intervalle :

$$\left[\,\omega_o - 3\,\sigma(\tau_o)\;;\;\omega_o + 3\,\sigma(\tau_o)\,\right]$$

On a la même probabilité pour que ω_o soit dans l'intervalle :

(161)
$$\boxed{J_2 \equiv \left[\,\omega_{exp} - 3\,\sigma(\tau_o)\;;\;\omega_{exp} + 3\,\sigma(\tau_o)\,\right]}$$

où $\omega_{exp} = \langle\omega(t)\rangle_{t_1,\tau_o} = \overline{\omega}_{\tau_1}$ (cf. équation (156))

Les deux utilisations proposées de l'intervalle de mesure $(t_1, t_1+\tau_o)$ fournissent exactement le même intervalle de précision J .

VII,1.3.3. Comparaison de la précision des deux méthodes

Les deux méthodes étudiées donnent exactement la même précision pour la localisation de ω_o sur l'axe des fréquences angulaires, ce qui résulte du caractère jointif des N mesures de durée τ_1.

Quel que soit le type de bruit prépondérant dans l'oscillateur, aucun gain de précision ne peut résulter d'une valeur élevée de N (avec $N\tau_1 = \tau_o$).

Cette conclusion, qui donne toute sa signification à la valeur $I(\tau_o)$, est liée aux seules instabilités de fréquence de l'oscillateur, l'appareil de mesure ayant été supposé parfait.

VII,2. *Propriétés statistiques des passages à zéro d'un signal quasi-sinusoïdal : interprétation de* $\tau I(\tau)$

L'interprétation du paramètre $\tau I(\tau)$ apparaissant dans la relation (25) est établie en étudiant les propriétés statistiques des passages à zéro (à pente positive) du signal quasi-sinusoïdal caractérisé par $I(\tau)$:

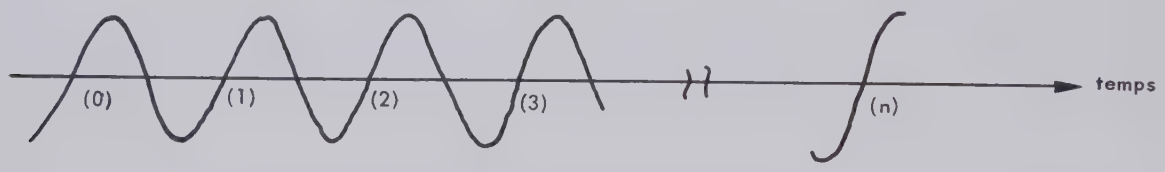


Fig. 31 - Passages à zéro d'un signal quasi-sinusoïdal

Si le signal est idéal de période T_o, la durée entre le passage (0) et le passage (n) est $\tau_{no} = nT_o$.

Si le signal possède une fluctuation aléatoire gaussienne de fréquence, la même durée est une variable aléatoire gaussienne τ_n de valeur moyenne égale à τ_{no}, et dont on calcule l'écart-type $\sigma[\tau_n]$.

La phase totale instantanée de l'oscillateur générant le signal étant $\omega_o t + \phi(t)$, la phase écoulée pendant un intervalle $(t, t+\tau_n)$ correspondant à n cycles du signal s'écrit :

$$2\pi n = \omega_o \tau_n + \phi(t+\tau_n) - \phi(t)$$

$$\tau_n = \frac{2\pi n}{\omega_o} - \frac{\phi(t+\tau_n) - \phi(t)}{\omega_o} \qquad (162)$$

La qualité du signal permet de faire l'approximation

$$\phi(t+\tau_n) - \phi(t) \simeq \phi(t+\tau_{no}) - \phi(t)$$

, soit :

$$\tau_n = \frac{2\pi n}{\omega_o} - \frac{\tau_{no}}{\omega_o} \cdot \frac{\phi(t+\tau_{no}) - \phi(t)}{\tau_{no}} \qquad (163)$$

$$\left(\text{avec : } \langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau_{no}} = \frac{1}{\tau_{no}} \int_t^{t+\tau_{no}} \dot{\phi}(\theta)\, d\theta = \frac{\phi(t+\tau_{no}) - \phi(t)}{\tau_{no}} \right)$$

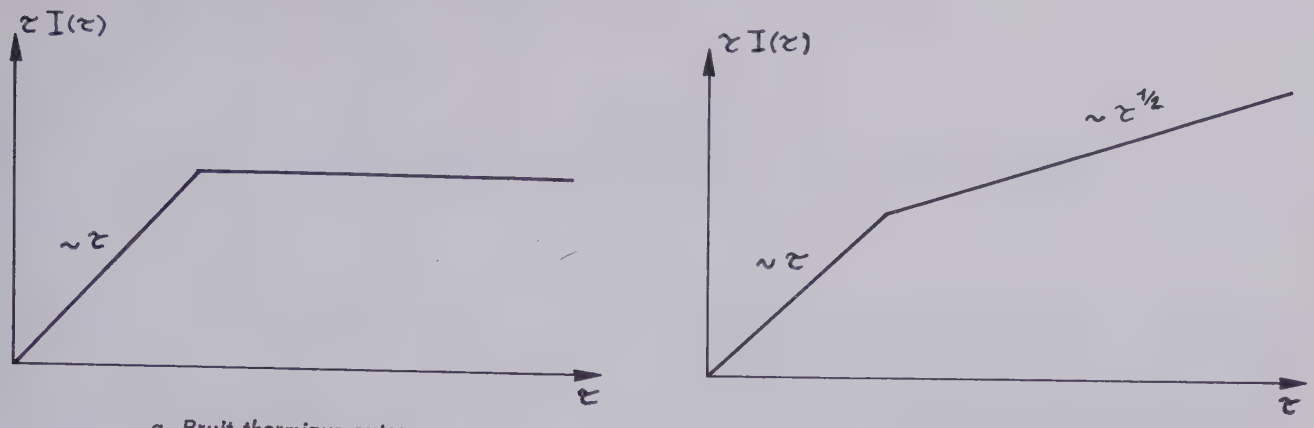
En prenant l'écart-type des deux membres :

$$\sigma[\tau_n] = \tau_{no} \frac{\sigma[\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau_{no}}]}{\omega_o} = \tau_{no}\, I(\tau_{no}) \qquad (164)$$

Le paramètre $\tau I(\tau)$ est une mesure de l'instabilité de fréquence puisque $\tau_{no} I(\tau_{no})$ est l'écart-type de la variable aléatoire τ_n représentant l'intervalle de temps correspondant à n périodes du signal perturbé.

Pour le bruit thermique externe, la courbe $\tau I(\tau)$ est représentée sur la figure 32a ; elle tend vers une valeur constante lorsque τ croît indéfiniment.

Pour le bruit thermique interne, la courbe de la figure 32b montre une croissance infinie en $\tau^{1/2}$ caractéristique du processus de diffusion de phase.



a. Bruit thermique externe

b. Bruit thermique interne

Fig. 32 - $\tau I(\tau)$ pour les bruits thermiques (asymptotes)

Chapitre VIII
ESTIMATION DE $I(\tau)$ A PARTIR D'ÉCHANTILLONS DE TAILLE N

Le paramètre statistique $I(\tau)$ s'est avéré être extrêmement important lors de la description statistique de l'instabilité de fréquence des oscillateurs et lors de l'étude de la précision des mesures de fréquence.

Comme pour tout paramètre statistique, sa détermination exacte nécessiterait un nombre infini d'oscillateurs, ou bien, en utilisant l'hypothèse d'ergodicité, une durée de mesure infinie. On ne peut donc faire expérimentalement que des estimations de $I(\tau)$, et cela pour un nombre discret de valeurs de τ , τ_{Max} étant limité par la durée totale de mesure disponible et τ_{min} par la technique expérimentale utilisée.

On étudie en détail dans ce chapitre les estimations possibles de $I(\tau)$ à l'aide d'échantillons de taille N (ensemble de N mesures). Par rapport à une étude antérieure [35], l'analyse qui suit présente l'avantage de justifier la validité des résultats obtenus pour un oscillateur ayant une diffusion de phase, et donc leur application au cas du bruit thermique interne.

On étudie également les conséquences de la saturation de $I(\tau)$ pour les très faibles valeurs de τ , sur la taille des échantillons à prendre.

Une généralisation de la définition de la variance d'un échantillon de taille N permettra d'obtenir une estimation sans biais dans le cas où $I^2(\tau) = A/\tau^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$.

VIII,1. Considérations générales sur l'estimation de $I(\tau)$

La définition théorique de $I(\tau)$ utilise la notion statistique d'écart-type ; la détermination de l'écart-type nécessite une moyenne d'ensemble calculée sur une infinité d'oscillateurs (voir fig. 11) : $I(\tau) = \sigma[\langle\dot{\phi}\rangle_{t,\tau}] / \omega_o$.

Les instants t et $t+\tau$ sont fixes dans l'expression de $I(\tau)$; l'échantillon $\dot{\phi}(t)$ change d'un échantillon de la variable aléatoire $\langle\dot{\phi}\rangle_{t,\tau}$ à l'autre (moyenne « à travers » le processus).

Deux problèmes pratiques importants se posent à l'expérimentateur :

1) le nombre d'oscillateurs identiques dont il dispose est généralement insuffisant pour calculer une moyenne d'ensemble. Il doit donc obtenir les échantillons $\langle\dot{\phi}\rangle_{t,\tau}$ à partir d'un échantillon unique du processus aléatoire $\dot{\phi}(t)$ (moyenne « le long » du processus : fig. 33).

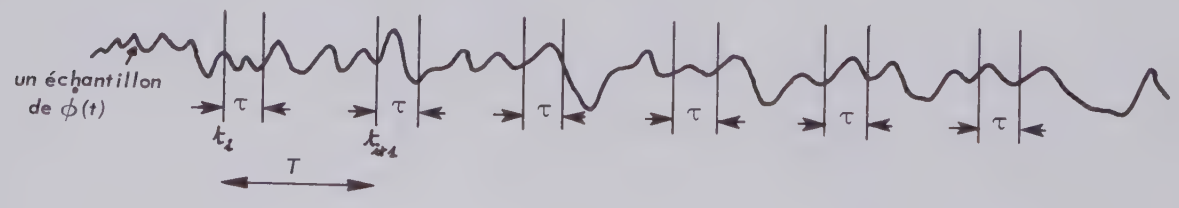


Fig. 33 - Détermination de $I(\tau)$ à l'aide d'un seul échantillon de $\dot{\phi}(t)$

L'utilisation d'une moyenne « le long » du processus est justifiée par l'hypothèse d'ergodicité pour le processus aléatoire stationnaire $\dot{\phi}(t)$.

2) La durée totale finie de toute mesure physique impose un nombre fini N_o de déterminations de $\langle\dot{\phi}\rangle_{t_i,\tau}$ (i : 1 à N_o).

VIII,2. Variance d'un échantillon de taille N : $\sigma^2[N,T,\tau]$

Soit un ensemble de N mesures $\langle\dot\phi\rangle_{t_i,\tau}$ ($i = 1$ à N) ; la variance* de cet échantillon de taille N s'écrit, en notant ω_i les valeurs mesurées :

(165) $$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\omega_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\omega_j\right)^2$$

C'est une nouvelle variable aléatoire dont on peut calculer l'espérance mathématique qui est représentative de l'estimation de la vraie variance à l'aide d'échantillons de taille N.

Nous nous proposons d'établir l'expression du rapport

(166) $$R(N,T,\tau) = \frac{E[\sigma^2[N,T,\tau]]}{E[\sigma^2[\infty,T,\tau]]}$$

où N est la taille des échantillons, T la durée entre le début de deux mesures successives, et τ la durée de chaque mesure. $E[\sigma^2[\infty,T,\tau]]$ s'identifiera avec $\sigma^2[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}]$, et ce rapport sera une mesure de la précision de l'estimation de $I(\tau)$:

(167) $$\boxed{R(N,T,\tau) = \left(\frac{I_{N,T}(\tau)}{I(\tau)}\right)^2}$$

VIII,3. Calcul de $E[\sigma^2[N,T,\tau]]$ dans le cas des fluctuations de phase stationnaires

VIII,3.1. Cas général ($T > \tau$)

Soient N valeurs mesurées (fig. 34) :

$$\langle\dot\phi\rangle_{nT,\tau} = \frac{1}{\tau}\int_{nT}^{nT+\tau}\dot\phi(\theta)\,d\theta = \frac{\Delta\phi(nT,nT+\tau)}{\tau} \qquad (n : 1 \to N)$$

$\Delta\phi(nT,nT+\tau) = \phi(nT+\tau) - \phi(nT)$ représente le bruit de phase accumulé de nT à $nT+\tau$ (qui sera noté $\Delta\phi_n$)

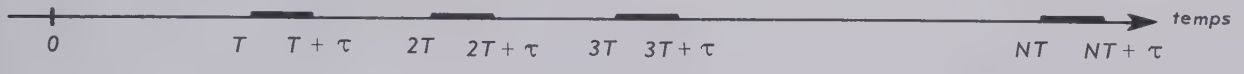


Fig. 34 - Position de N mesures

La variance de cet échantillon a pour expression :

(168) $$\sigma^2[N,T,\tau] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{\Delta\phi_n^2}{\tau^2} - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{\Delta\phi_n}{\tau}\right)^2$$

Le calcul de l'espérance mathématique de cette expression suppose $\phi(t)$ stationnaire, et sera généralisé plus loin pour le cas de la diffusion de phase.

Calcul de $E[\Delta\phi_n^2]$

(169)
$$E[\Delta\phi_n^2] = E[\phi^2(nT+\tau) + \phi^2(nT) - 2\,\phi(nT).\phi(nT+\tau)]$$
$$= 2\,E[\phi^2(t)] - 2\,E[\phi(nT)\,\phi(nT+\tau)]$$
$$= 2\,[R_\phi(0) - R_\phi(\tau)]$$

---

* *D' autres définitions seront présentées dans le paragraphe VIII,7.*

Nous poserons :

(170) $$U(\tau) = 2\,[\,R_\phi(0) - R_\phi(\tau)\,]$$

Calcul de $E[\Delta\phi_n\,\Delta\phi_p]$ $\quad (n \neq p \quad p<n)$

$$E[\Delta\phi_n\,\Delta\phi_p] = E[(\phi(nT+\tau)-\phi(nT)).(\phi(pT+\tau)-\phi(pT))]$$

(171) $$= E[\phi(nT+\tau)\,\phi(pT+\tau)] + E[\phi(nT)\,\phi(pT)]$$

$$- E[\phi(nT)\,\phi(pT+\tau)] - E[\phi(pT)\,\phi(nT+\tau)]$$

$$= 2R_\phi((n-p)T) - R_\phi((n-p)T-\tau) - R_\phi((n-p)T+\tau)$$

Calcul de $E[\sigma^2[N,T,\tau]]$

(172) $$E[\sigma^2[N,T,\tau]] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{U(\tau)}{\tau^2} - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\frac{E[\Delta\phi_n\,\Delta\phi_p]}{\tau^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\left\{U(\tau) - \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}E[\Delta\phi_n\,\Delta\phi_p]\right\}$$

La somme double est calculée en séparant les N termes $n=p$, des N^2-N termes $n\neq p$ (on pose $\alpha=n-p>0$) :

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}E[\Delta\phi_n\,\Delta\phi_p]$$

$$= \sum_{n=p=1}^{N}U(\tau) + 2\sum_{p<n=1}^{N}[\,2R_\phi(\alpha T) - R_\phi(\alpha T-\tau) - R_\phi(\alpha T+\tau)\,]$$

$$= NU(\tau) + 2\sum_{p<n=1}^{N}[-2R_\phi(0)+2R_\phi(\alpha T) + R_\phi(0)-R_\phi(\alpha T-\tau) + R_\phi(0)-R_\phi(\alpha T+\tau)]$$

$$= NU(\tau) + 2\sum_{p<n=1}^{N}\left[-U(\alpha T) + \frac{1}{2}U(\alpha T-\tau) + \frac{1}{2}U(\alpha T+\tau)\right]$$

D'où l'expression générale :

(173) $$E[\sigma^2[N,T,\tau]] = \frac{1}{\tau^2}\left\{U(\tau) - \frac{U(\tau)}{N} + \frac{1}{N^2}\sum_{p<n=1}^{N}[2U(\alpha T)-U(\alpha T-\tau)-U(\alpha T+\tau)]\right\}$$

VIII,3.2. Cas des mesures adjacentes ($T = \tau$)

L'expression générale de $E[\sigma^2[N,T,\tau]]$ se simplifie notablement dans le cas particulier important où les échantillons mesurés sont adjacents, ce qui revient à écrire $T=\tau$:

(174) $$E[\sigma^2[N,\tau,\tau]] = \frac{1}{\tau^2}\left\{U(\tau) - \frac{U(\tau)}{N} + \frac{1}{N^2}\sum_{p<n=1}^{N}[2U(\alpha\tau)-U((\alpha-1)\tau)-U((\alpha+1)\tau)]\right\}$$

La somme double comprend :

$N-1$ termes où $\alpha = 1$
$N-2$ termes où $\alpha = 2$
$N-3$ termes où $\alpha = 3$

$N-(N-1)=1$ terme où $\alpha = N-1$

et s'écrit donc :

$$
\begin{aligned}
&(N-1)\,[\,2U(\tau) - U(0) - U(2\tau)\,] \\
&+ (N-2)\,[\,2U(2\tau) - U(\tau) - U(3\tau)\,] \\
&+ (N-3)\,[\,2U(3\tau) - U(2\tau) - U(4\tau)\,] \\
&+ \cdots\cdots \\
&+ 2\,[\,2U((N-2)\tau) - U((N-3)\tau) - U((N-1)\tau)\,] \\
&+ 1\,[\,2U((N-1)\tau) - U((N-2)\tau) - U(N\tau)\,]
\end{aligned}
$$

(175)
$$
\begin{aligned}
&= [\,2(N-1) - (N-2)\,]\,U(\tau) \\
&+ [\,-(N-1) + 2(N-2) - (N-3)\,]\,U(2\tau) \\
&+ [\,-(N-2) + 2(N-3) - (N-4)\,]\,U(3\tau) \\
&+ \cdots\cdots \\
&+ [\,-2 + 2\,]\,U((N-1)\tau \\
&- U(N\tau) \\
&= N\,U(\tau) - U(N\tau)
\end{aligned}
$$

Dans le cas des N mesures adjacentes, on a donc :

(176)
$$E[\sigma^2[N,\tau,\tau]] = \frac{U(\tau)}{\tau^2}\left[\,1 - \frac{1}{N^2}\,\frac{U(N\tau)}{U(\tau)}\,\right]$$

La limite : $\lim_{N\to\infty} U(N\tau) = \lim_{N\to\infty} 2[R_\phi(0) - R_\phi(N\tau)] = 2R_\phi(0)$

étant finie, on a :

(177)
$$\lim_{N\to\infty} E[\sigma^2[N,\tau,\tau]] = \frac{U(\tau)}{\tau^2} = \frac{2}{\tau^2}[R_\phi(0) - R_\phi(\tau)] = \sigma^2[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}]$$

d'où le rapport :

$$R(N,\tau) = \frac{E[\sigma^2[N,\tau,\tau]]}{\sigma^2[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}]} = 1 - \frac{1}{N^2}\,\frac{U(N\tau)}{U(\tau)}$$

soit enfin :

(178)
$$\boxed{R(N,\tau) = 1 - \left(\frac{I(N\tau)}{I(\tau)}\right)^2}$$

Pour une valeur τ_o donnée, $R(N, \tau_o)$ est une estimation de la précision avec laquelle $I(\tau_o)$ est déterminé avec des échantillons de taille N. La loi $R(N)$ dépend des propriétés statistiques du bruit perturbant l'oscillateur. L'allure générale de $R(N, \tau_o)$ en fonction de N est représentée sur la figure 35 ; ses valeurs numériques dépendent grandement, comme nous le verrons sur des exemples particuliers, de la valeur de τ_o.

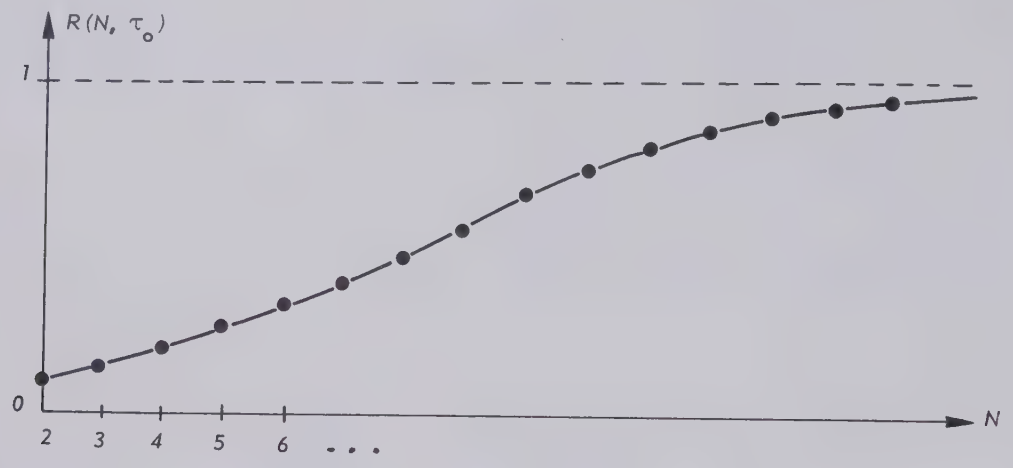


Fig. 35 - Mesures adjacentes. $R(N, \tau_o)$ dépend de la nature du bruit de l'oscillateur

VIII,3.3. Cas des mesures non corrélées

Un autre cas important dans la pratique, est celui où l'intervalle T entre deux mesures successives est suffisamment grand pour que les échantillons ne soient pas corrélés ($T \gg$ temps de corrélation de $\dot{\phi}(t)$).

L'expression (173) de $E[\sigma^2[N,T,\tau]]$ se simplifie alors considérablement car, pour T grand :

$$U(\alpha T) \simeq U(\alpha T - \tau) \simeq U(\alpha T + \tau) \simeq 2 R_\phi(0)$$

soit :

$$E[\sigma^2[N,T,\tau]] = \frac{U(\tau)}{\tau^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \tag{179}$$

Dans ce cas particulier, le rapport $R(N,T,\tau)$ prend la forme très simple :

$$R(N,T,\tau) = \frac{E[\sigma^2[N,T,\tau]]}{\sigma^2[\langle\dot{\phi}\rangle_{t,\tau}]} = 1 - \frac{1}{N} \tag{180}$$

Lorsque T est grand vis-à-vis du temps de corrélation de $\dot{\phi}(t)$, la loi $R(N,T,\tau)$ ne dépend plus que de N, et est en particulier indépendante du type de bruit perturbant l'oscillateur. La loi $1 - \frac{1}{N}$ est simplement caractéristique des variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

VIII,4. Calcul de $E[\sigma^2[N, T, \tau]]$ dans le cas de la diffusion de phase

L'établissement de la loi $R(N,T,\tau)$ a été effectué en utilisant la stationnarité des fluctuations de phase (utilisation de $R_\phi(\tau)$; valeur finie de $R_\phi(0)$).

L'application des lois obtenues au cas du bruit thermique interne nécessite de justifier leur validité lorsque $\phi(t)$ est un processus de diffusion.

Pour cela, considérons les N mesures expérimentales :

$$\langle\dot{\phi}\rangle_{nT,\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{nT}^{nT+\tau} \dot{\phi}(\theta)\, d\theta \qquad (n = 1 \text{ à } N)$$

La variance de cet échantillon de taille N s'écrit :

$$(181)\quad \sigma^2[N,T,\tau] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle\dot\phi\rangle^2_{nT,\tau} - \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\left(\langle\dot\phi\rangle_{nT,\tau}\,\langle\dot\phi\rangle_{pT,\tau}\right)$$

avec, en fonction de l'autocorrélation des fluctuations stationnaires de fréquence :

$$(182)\quad E\left[\langle\dot\phi\rangle^2_{nT,\tau}\right] = \frac{1}{\tau^2}\int_{nT}^{nT+\tau}\int_{nT}^{nT+\tau} R_{\dot\phi}(\theta_1-\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2 \;=\; \sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{nT,\tau}\right]$$

$$(183)\quad E\left[\langle\dot\phi\rangle_{nT,\tau}\,\langle\dot\phi\rangle_{pT,\tau}\right] = \frac{1}{\tau^2}\int_{nT}^{nT+\tau}\int_{pT}^{pT+\tau} R_{\dot\phi}(\theta_1-\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

$$E\left[\sigma^2[N,T,\tau]\right] =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} E\left[\langle\dot\phi\rangle^2_{nT,\tau}\right] - \frac{1}{N^2}\left\{\sum_{n=p=1}^{N} E\left[\langle\dot\phi\rangle^2_{nT,\tau}\right] + 2\sum_{p<n=1}^{N}\sum \frac{1}{\tau^2}\int_{nT}^{nT+\tau}\int_{pT}^{pT+\tau} R_{\dot\phi}(\theta_1-\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2\right\}$$

$$= \sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right] - \frac{\sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right]}{N} + \frac{1}{N^2}\sum_{p<n=1}^{N}\sum\left(-\frac{2}{\tau^2}\int_{nT}^{nT+\tau}\int_{pT}^{pT+\tau} R_{\dot\phi}(\theta_1-\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2\right)$$

En posant* :

$$(184)\quad U(\tau) = \tau^2\,\sigma^2\left[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot\phi}(f)\left(\frac{\sin\pi\tau f}{\pi f}\right)^2 df$$

il vient :

$$(185)\quad E\left[\sigma^2[N,T,\tau]\right] = \frac{1}{\tau^2}\left\{U(\tau) - \frac{U(\tau)}{N} + \frac{1}{N^2}\sum_{p<n=1}^{N}\sum\left(-2\int_{nT}^{nT+\tau}\int_{pT}^{pT+\tau} R_{\dot\phi}(\theta_1-\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2\right)\right\}$$

Dans le cas particulier des *mesures adjacentes* ($T=\tau$), l'intégrale double s'exprime aisément en fonction de $U(\tau)$:

$$\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}\int_{p\tau}^{(p+1)\tau} R_{\dot\phi}(\theta_1-\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

$$= \int_{f=-\infty}^{f=+\infty} S_{\dot\phi}(f)\left[\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}\int_{p\tau}^{(p+1)\tau}\cos 2\pi f(\theta_1-\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2\right]df$$

---

* *Cette définition de* $U(\tau)$ *ne nécessite pas la stationnarité de la phase. Toutefois, si* $\Phi(t)$ *est stationnaire, on retrouve* $2\left[R_\phi(0) - R_\phi(\tau)\right]$

avec :

$$(186) \qquad \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{p\tau}^{(p+1)\tau} \cos 2\pi f (\theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 f^2} \left[-4 \sin^2 (n-p)\pi\tau f + 2 \sin^2 (n-p-1)\pi\tau f + 2 \sin^2 (n-p+1)\pi\tau f \right]$$

soit encore :

$$(187) \qquad -2 \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{p\tau}^{(p+1)\tau} R_{\dot\phi}(\theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot\phi}(f) \left(\frac{\sin (n-p)\pi\tau f}{\pi f} \right)^2 df - \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot\phi}(f) \left(\frac{\sin (n-p-1)\pi\tau f}{\pi f} \right)^2 df$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot\phi}(f) \left(\frac{\sin (n-p+1)\pi\tau f}{\pi f} \right)^2 df$$

$$= 2\, U((n-p)\tau) - U((n-p-1)\tau) - U((n-p+1)\tau)$$

D'où résulte une expression identique à celle de l'équation (174) :

$$E[\sigma^2[N,\tau,\tau]] = \frac{1}{\tau^2} \left\{ U(\tau) - \frac{U(\tau)}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{\kappa n=1}^{N} \sum [\, 2U(\alpha\tau) - U((\alpha-1)\tau) - U((\alpha+1)\tau)] \right\}$$

et, après dénombrement des termes de la somme double :

$$(178) \qquad R(N,\tau) = 1 - \left(\frac{I(N\tau)}{I(\tau)} \right)^2$$

Ce calcul de la loi $R(N,\tau)$, utilisant une définition adéquate de la quantité $U(\tau)$, justifie l'application du résultat au cas de l'oscillateur perturbé par son bruit thermique interne.

Avant d'établir les lois $R(N,\tau)$ relatives aux bruits thermiques interne et externe, il est intéressant de calculer la variance de la variable aléatoire $\sigma^2[N,T,\tau]$ qui est une estimation de la dispersion des différents échantillons $\sigma_i^2[N,T,\tau]$ autour de la valeur moyenne $E[\sigma_i^2[N,T,\tau]]$.

VIII,5. Calcul de la variance de $\sigma^2[N, T, \tau]$

En notant ω_i les N valeurs mesurées, la variable aléatoire

$$y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \omega_i \right)^2$$

a pour variance :

$$(188) \qquad \sigma^2[y] = E[y^2] - (E[y])^2$$

Calcul de $E[y^2]$

$$y^2 = \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \omega_n^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{n=1}^{N} \omega_n \right)^2 \right] \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \omega_p^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{p=1}^{N} \omega_p \right)^2 \right]$$

$$(189) \quad = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{p=1}^{N} \omega_n^2 \omega_p^2 + \frac{1}{N^4} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{p=1}^{N} \omega_k \omega_\ell \omega_n \omega_p$$

$$- \frac{2}{N^3} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{p=1}^{N} \omega_\ell^2 \omega_n \omega_p$$

Les variables aléatoires considérées étant gaussiennes, on a :

$$(190) \quad \begin{cases} E[\omega_k \omega_\ell \omega_n \omega_p] = E[\omega_k \omega_\ell] \cdot E[\omega_n \omega_p] + E[\omega_k \omega_n] \cdot E[\omega_\ell \omega_p] + E[\omega_k \omega_p] E[\omega_\ell \omega_n] \\ E[\omega_n^2 \omega_p^2] = 2 E^2[\omega_n \omega_p] + E[\omega_n^2] \cdot E[\omega_p^2] \\ E[\omega_\ell^2 \omega_n \omega_p] = E[\omega_\ell^2] E[\omega_n \omega_p] + 2 E[\omega_\ell \omega_n] E[\omega_\ell \omega_p] \end{cases}$$

$$E[y^2] = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{p=1}^{N} \left[2 E^2[\omega_n \omega_p] + E[\omega_n^2] E[\omega_p^2] \right]$$

$$(191) \quad + \frac{1}{N^4} \sum_{k,\ell,n,p=1}^{N} \left[E[\omega_k \omega_\ell] \cdot E[\omega_n \omega_p] + E[\omega_k \omega_n] \cdot E[\omega_\ell \omega_p] + E[\omega_\ell \omega_p] \cdot E[\omega_3 \omega_n] \right]$$

$$- \frac{2}{N^3} \sum_{\ell,n,p=1}^{N} \left[E[\omega_\ell^2] E[\omega_n \omega_p] + 2 E[\omega_\ell \omega_n] \cdot E[\omega_\ell \omega_p] \right]$$

Calcul de $E^2[y]$

$$E[y] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} E[\omega_n^2] - \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{p=1}^{N} E[\omega_n \omega_p]$$

$$(192) \quad E^2[y] = \frac{1}{N^2} \sum_{n,k=1}^{N} E[\omega_n^2] E[\omega_k^2] + \frac{1}{N^4} \sum_{k,\ell,n,p=1}^{N} E[\omega_k \omega_\ell] \cdot E[\omega_n \omega_p]$$

$$- \frac{2}{N^3} \sum_{k,\ell,n=1}^{N} E[\omega_n^2] \cdot E[\omega_k \omega_\ell]$$

Variance $\sigma^2[y] = \sigma^2[\sigma^2[N, T, \tau]]$

(193)
$$\sigma^2[y] = \frac{2}{N^2} \sum_{m,p=1}^{N} \sum^{N} E^2[\omega_n \omega_p] + \frac{2}{N^4} \sum_{k,\ell,n,p=1}^{N} \sum^{N} \sum^{N} \sum^{N} E[\omega_k \omega_\ell] \cdot E[\omega_n \omega_p]$$
$$- \frac{4}{N^3} \sum_{\ell,m,p=1}^{N} \sum^{N} \sum^{N} E[\omega_\ell \omega_n] \cdot E[\omega_\ell \omega_p]$$

Cette expression obtenue en supposant la variable aléatoire ω gaussienne, prend une forme très simple lorsque les ω_i sont statistiquement indépendants, c'est-à-dire lorsque la durée T entre deux mesures successives est très grande par rapport au temps de corrélation de $\dot{\phi}(t)$:

$$\begin{cases} E[\omega_i \omega_j] = 0 & i \neq j \\ E[\omega_i^2] = \sigma^2[\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau}] & \forall i \end{cases}$$

(C'est également le cas, quel que soit T, si $\dot{\phi}(t)$ est un bruit blanc*).

L'expression de $\sigma^2[\sigma^2[N, T, \tau]]$ se simplifie considérablement :

$$\sigma^2[\sigma^2[N,T,\tau]] = \frac{2}{N} E^2[\omega_i^2] + \frac{2}{N^2} E^2[\omega_k^2] \cdot E^2[\omega_n^2] - \frac{4}{N^2} E^2[\omega_\ell^2]$$

soit :

(194)
$$\begin{cases} \sigma^2[\sigma^2[N,T,\tau]] = \dfrac{2(N-1)}{N^2} \cdot \sigma^4[\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau}] \\ \lim\limits_{N \to \infty} \sigma^2[\sigma^2[N,T,\tau]] = 0 \end{cases}$$

Ce résultat est caractéristique des variables aléatoires gaussiennes indépendantes [20].

VIII,6. *Application aux bruits thermiques*

L'expression générale (178) de la loi $R(N,\tau)$ est maintenant particularisée en utilisant les expressions de $U(\tau)$ relatives aux bruits thermiques interne et externe des oscillateurs.

VIII,6.1. *Bruit thermique interne*

VIII,6.1.1. Expressions classiques

(89) $$U_i(\tau) = \tau^2 \sigma^2[\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau}] = \frac{\omega_o^2 k T}{2PQ^2} \tau$$

Soit :

(179)
$$R_i'(N,\tau) = 1 - \frac{1}{N}$$

* *C'est le cas dans l'analyse classique du bruit thermique interne.*

On retrouve la loi (180) relative aux mesures indépendantes, ce qui résulte du fait que l'analyse classique donne un bruit blanc pour $\dot{\phi}(t)$ (les échantillons, même adjacents, sont non corrélés).

VIII,6.1.2. Expressions généralisées

L'analyse développée au chapitre VI permet d'écrire :

(92) $$U_i(\tau) = \alpha\left(e^{-\beta\tau} - 1 + \beta\tau\right) \qquad \alpha = \frac{\omega_o^2 kT}{2PQ^2} \qquad \beta = \frac{\pi f_o}{Q}$$

(195) $$\boxed{R_i(N,\tau) = 1 - \frac{1}{N^2}\cdot\frac{e^{-\beta N\tau} - 1 + \beta N\tau}{e^{-\beta\tau} - 1 + \beta\tau}}$$

VIII,6.1.3. Discussion de la loi $R_i(N, \tau)$

Pour un oscillateur particulier (β donné) et une valeur de τ choisie, l'estimation de $I(\tau)$ est d'autant plus précise que $R_i(N,\tau)$ est voisin de l'unité.

Etant données les larges gammes de variation possibles pour β et τ, une étude systématique de tous les cas possibles est nécessaire pour déterminer la valeur de N telle que $R_i(N,\tau) \simeq 1$.

- **Cas $\tau \ll \beta^{-1}$**

Lorsque $N \ll 1/\beta\tau$, on a l'expression approchée :

(196) $$\boxed{R_i(N,\tau) \simeq \frac{\beta N\tau}{3} \ll 1}$$

La valeur choisie pour N est trop faible, et la valeur estimée est beaucoup plus faible que le $I(\tau)$ vrai.

Lorsque $N \gg 1/\beta\tau$, on a :

(197) $$\boxed{R_i(N,\tau) \simeq 1 - \frac{2}{\beta N\tau} \simeq 1}$$

La valeur de N est suffisamment grande pour avoir une estimation précise de $I(\tau)$.

- **Cas $\tau \gg \beta^{-1}$**

C'est à nouveau la loi $1 - 1/N$ qui donne la précision, car on est sur la zone $I(\tau) \sim \tau^{-\frac{1}{2}}$ caractéristique d'un bruit blanc de fréquence.

VIII,6.2. Bruit thermique externe

VIII,6.2.1. Expressions classiques

La loi classique $I(\tau) \sim \tau^{-1}$ donne :

(198) $$\boxed{R'_e(N) = 1 - \frac{1}{N^2}}$$

Cette loi tend rapidement vers l'unité lorsque N augmente.

VIII,6.2.2. Expressions généralisées

L'expression complète (114) de $I_e(\tau)$ donne :

(199) $$V_e(\tau) = 2S\left[1 - e^{-2\pi^2\sigma_s^2\tau^2}\right]$$

(200) $$\boxed{R_e(N,\tau) = 1 - \frac{1}{N^2}\cdot\frac{1 - e^{-2\pi^2\sigma_s^2 N^2\tau^2}}{1 - e^{-2\pi^2\sigma_s^2\tau^2}}}$$

VIII,6.2.3. Discussion de la loi $R_e(N, \tau)$

• **Cas** $\tau \ll \sigma_s^{-1}$

Lorsque $N \ll 1/\sigma_s\tau$:

(201) $$\boxed{R_e(N,\tau) \simeq (\pi N \sigma_s \tau)^2 \ll 1}$$

Lorsque $N \gg 1/\sigma_s\tau$:

(202) $$\boxed{R_e(N,\tau) \simeq 1 - \frac{1}{2(\pi N\sigma_s\tau)^2} \simeq 1}$$

Une valeur N suffisamment élevée doit être choisie pour avoir une estimation précise de $I(\tau)$.

• **Cas** $\tau \gg \sigma_s^{-1}$

On retrouve naturellement la loi $1 - 1/N^2$ obtenue à partir de l'expression classique $I(\tau) \sim \tau^{-1}$.

VIII,6.3. Conclusion sur le choix de N

L'analyse précédente permet de tirer quelques conclusions générales quant au choix de N pour un oscillateur et une valeur de τ donnés ; quel que soit le type de bruit thermique prépondérant, deux cas limites sont à considérer :

1er cas : τ très petit vis-à-vis du temps de corrélation des fluctuations de fréquence :

la valeur de N doit être suffisamment élevée ($N \gg 1/\beta\tau$ ou $N \gg 1/\sigma_s\tau$) pour que $R(N,\tau) \simeq 1$. En particulier, N doit être d'autant plus grand que τ est petit, ce qui n'apparaît pas sur les expressions classiques, mettant ainsi en évidence le rôle de la saturation de $I(\tau)$ sur sa détermination.

2e cas : τ très grand vis-à-vis du temps de corrélation des fluctuations de fréquence :

La loi $R(N,\tau)$ n'est plus fonction que de N et tend rapidement vers l'unité lorsque N augmente.

Le tableau IV résume schématiquement l'ensemble des résultats relatifs à l'estimation de $I(\tau)$.

VIII,7. Application a la loi $I^2(\tau) = A/\tau^\alpha$ ($\alpha > 0$)

Dans le cas où $I(\tau)$ est une puissance décroissante de τ, le rapport $R(N,\tau)$ prend une forme simple indépendante de τ :

(203) $$\boxed{R(N,\tau) = 1 - \left(\frac{I(N\tau)}{I(\tau)}\right)^2 = 1 - \frac{1}{N^\alpha}}$$

Les cas particuliers $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ ont été rencontrés avec les expressions classiques relatives aux bruits thermiques.

Une telle loi $R(N)$ suggère une modification de la définition de la variance de l'échantillon de taille N, entrainant $R(N) = 1$ pour tout $N \geq 2$; en posant :

(204)
$$\sigma_N^2(\omega_i) = \frac{N^\alpha}{N^\alpha - 1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_j \right)^2$$

il est facile de voir que :

(205)
$$R(N,\tau) = \frac{N^\alpha}{N^\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{N^\alpha} \right) = 1$$

L'estimation de $I(\tau)$ est ainsi sans biais ; les cas particuliers $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ seront traités en détail dans le paragraphe VIII,10 ; l'ensemble des résultats est regroupé dans le tableau V.

VIII,8. Application au bruit de scintillation de fréquence

L'estimation du palier de $I(\tau)$ créé par le bruit de scintillation de fréquence, peut être effectuée à l'aide de la loi :

(178)
$$R(N,\tau) = 1 - \left(\frac{I(N\tau)}{I(\tau)} \right)^2$$

On remarque que $R(N,\tau)$ est nul si $I(\tau)$ est constant pour tout τ positif ; ce n'est qu'une décroissance de $I(N\tau)$ lorsque N augmente qui permet la croissance de (178).

Avec le modèle de bruit en $1/f$ développé au chapitre VI, $I(\tau)$ est constant sur un long intervalle avant de décroître lentement selon une loi logarithmique, puis en $\tau^{-\frac{1}{2}}$ pour $\tau \gg$ temps de corrélation de $\dot{\phi}_D(t)$ (on suppose $\varepsilon \neq 0$). N doit être suffisamment grand (tel que $N\tau \gg (2/q) \cdot e^{-1/2\varepsilon}$) pour permettre la mesure de $I_N(\tau)$: même pour q très petit, N pourra être d'autant plus faible que ε sera voisin de zéro.

VIII,9. Relation entre $E[\sigma^2[N, \tau, \tau]]$ et $S_{\dot{\phi}}(f)$ [47].

Les quantités $E[\sigma^2[N,\tau,\tau]]$ et $S_{\dot{\phi}}(f)$ étant souvent considérées comme définitions dans le domaine temps et dans le domaine fréquence de l'instabilité de fréquence [45], il est intéressant d'établir la relation qui les lie ; lorsque $N \to \infty$, cette relation doit redonner :

(16)
$$\sigma^2[\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau}] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) \cdot \left(\frac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f} \right)^2 df$$

L'espérance mathématique de $\sigma^2[N,\tau,\tau]$ s'écrit :

$$E[\sigma^2[N,\tau,\tau]] = \frac{U(\tau)}{\tau^2} - \frac{U(N\tau)}{N^2\tau^2}$$

(206)
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) \left(\frac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f} \right)^2 df - \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) \left(\frac{\sin N\pi\tau f}{N\pi\tau f} \right)^2 df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) \left(\frac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\sin N\pi\tau f}{N \sin \pi\tau f} \right)^2 \right] df$$

Une expression plus complète existe pour le cas des mesures non-adjacentes ($T > \tau$) [45] :

$$E[\sigma^2[N,T,\tau]] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f) \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\sin r N \pi \tau f}{N \sin r \pi \tau f}\right)^2\right] df \qquad (207)$$

$$(r = T/\tau)$$

VIII,10. Remarques complémentaires sur la détermination de l'instabilité de fréquence

Le problème de la définition et de la mesure de l'instabilité de fréquence a été traité en détail par « le Sous-Comité I.E.E.E. sur la stabilité de fréquence » [45].

Parmi les questions étudiées, il est intéressant de noter que :

1) La quantité $E[\sigma^2[N=2,\tau,\tau]]$ est recommandée comme *mesure* de l'instabilité de fréquence (c'est la variance d'**Allan** [35]). En effet, le fait de fixer $N=2$ entraîne que $E[\sigma^2[2,\tau,\tau]]$ existe même pour des *modèles* de bruit qui donnent $\lim_{N\to\infty} E[\sigma^2[N,\tau,\tau]] = \infty$; il faut toutefois noter que ces modèles sont tels que $\overline{\dot\phi^2}$ est infini, et ne sont donc pas physiquement réalistes.

$E[\sigma^2[2,\tau,\tau]]$ est estimé en regroupant $2N_0$ mesures deux par deux :

$$E[\sigma^2[2,\tau,\tau]] \simeq \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \sigma_i^2[2,\tau,\tau] \qquad (208)$$

(où N_0 doit être suffisamment élevé, pratiquement > 100).

2) La variance d'un échantillon de taille N est définie dans la littérature américaine [35, 45] par l'expression :

$$\sigma_N^2[\omega] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_j\right)^2 \qquad (209)$$

où $N-1$ remplace le N de l'équation (165).

Cette définition a pour effet de donner une estimation sans biais dans le cas où les ω_i sont non corrélés :

la loi $R(N) = 1 - \frac{1}{N}$

est remplacée par : $R(N) = \left(\frac{N}{N-1}\right)\left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1$

soit :

$$\frac{E[\sigma^2[N,T,\tau]]}{\sigma^2[\langle\dot\phi\rangle_{t,\tau}]} = 1 \qquad (210)$$

La mesure conseillée pour l'instabilité de fréquence s'écrit alors :

$$E[\sigma^2[2,\tau,\tau]] = E\left[\frac{(\omega_i - \omega_{i-1})^2}{2}\right] \qquad (211)$$

où ω_i et ω_{i-1} sont deux mesures successives.

Application au bruit thermique externe :

La définition précédente de la variance de l'échantillon de taille N donne, pour le bruit thermique externe ($\tau \gg$ temps de corrélation de $\dot\phi(t)$) :

$$R_e(N) = \frac{N}{N-1}\left(1 - \frac{1}{N^2}\right) = \frac{N+1}{N} \qquad (212)$$

Dans ce cas important, qui est généralement celui des oscillateurs à quartz, la définition utilisant $1/N-1$ ne fournit pas une estimation sans biais ; elle est moins précise que celle utilisant le facteur $1/N$ puisque :

(213)
$$\frac{N+1}{N} - 1 = \frac{1}{N}$$
$$1-\left(1-\frac{1}{N^2}\right) = \frac{1}{N^2} < \frac{1}{N}$$

Il est intéressant d'introduire une troisième définition de la variance de l'échantillon de taille N (cf. paragraphe VIII,7) :

(214)
$$\sigma_N^2[\omega_i] = \frac{N}{N^2-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_j \right)^2$$

qui donne une estimation sans biais.

Pour $N = 2$, on trouve :

(215)
$$E[\sigma^2[2,\tau,\tau]] = E\left[\frac{(\omega_i - \omega_{i-1})^2}{3}\right]$$

3) Les différentes estimations possibles de l'instabilité dans le domaine temps peuvent être reliées entre elles lorsque $S_\phi(f)$ varie comme une puissance de f , grâce aux fonctions :

(216)
$$B_1(N, n, \mu) = \frac{E[\sigma^2[N,T,\tau]]}{E[\sigma^2[2,T,\tau]]} \qquad n = T/\tau$$

(217)
$$B_2(n, \mu) = \frac{E[\sigma^2[2,T,\tau]]}{E[\sigma^2[2,\tau,\tau]]}$$

($E[\sigma^2[N,T,\tau]] \sim \tau^\mu$ pour N et n constants).

La relation la plus générale s'écrit :

(218)
$$\frac{E[\sigma^2[N_2,T_2,\tau_2]]}{E[\sigma^2[N_1,T_1,\tau_1]]} = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^\mu \cdot \left(\frac{B_1(N_2,n_2,\mu) \cdot B_2(n_2,\mu)}{B_1(N_1,n_1,\mu) \cdot B_2(n_1,\mu)} \right)$$

Les fonctions B_1 et B_2 sont étudiées et tabulées pour différents types de spectres dans la référence [46].

4) L'importance de l'instabilité de fréquence dans le domaine temps est telle que l'on trouve actuellement dans le commerce des compteurs de fréquence-calculateurs, qui déterminent automatiquement la variance d'Allan à partir des résultats de mesure.

De même, certains laboratoires spécialisés, parmi lesquels le Laboratoire de l'Horloge Atomique de Besançon, ont été amenés à développer un équipement automatique pour la détermination de l'instabilité dans le domaine temps.

TABLEAU IV - ESTIMATION DE $I(\tau)$

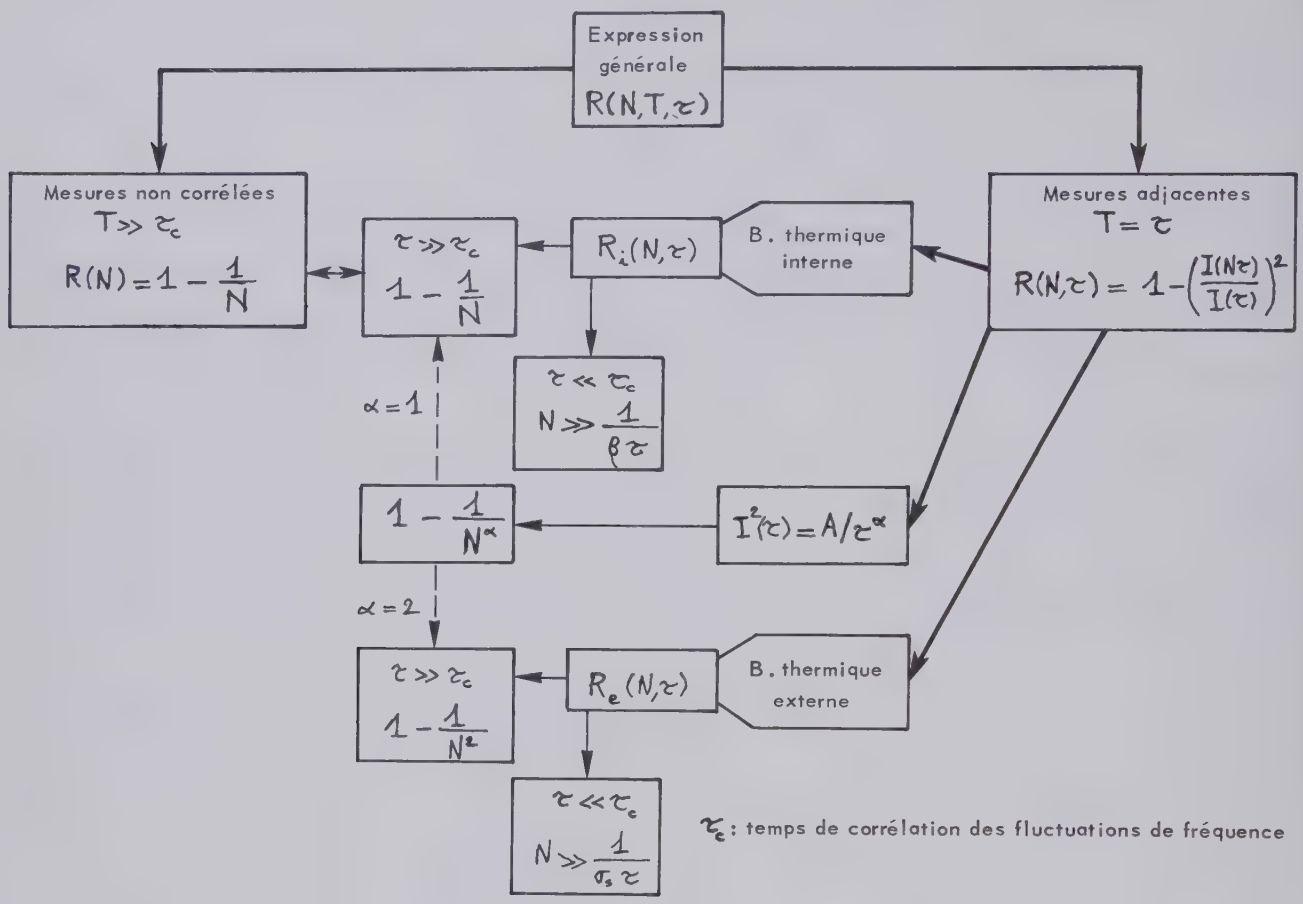
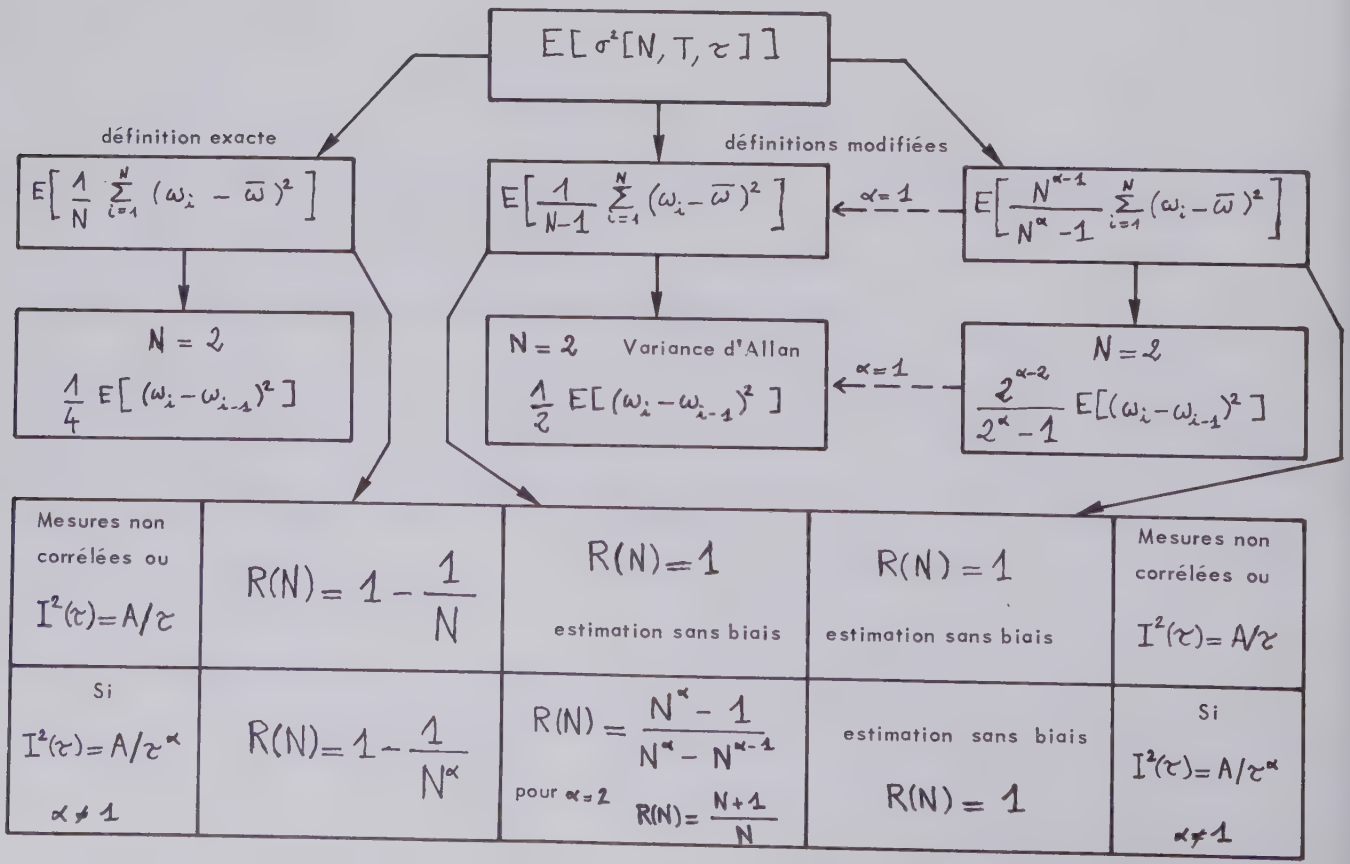


TABLEAU V - CONSÉQUENCE DES DIFFÉRENTES DÉFINITIONS DE LA VARIANCE D'ÉCHANTILLON



Chapitre IX
UNE TECHNIQUE EXPERIMENTALE POUR L'ESTIMATION DE $I(\tau)$

Après avoir montré l'importance du paramètre $I(\tau)$ pour la description statistique du bruit de fréquence d'un oscillateur, et étudié le problème de l'estimation de $I(\tau)$ à partir d'échantillons de taille N, on décrit dans ce chapitre une technique expérimentale développée à l'O.N.E.R.A. pour la mesure de l'instabilité de fréquence dans le domaine temps.

Les techniques décrites dans la littérature [1, 2, 45] reposent généralement sur le comptage de la fréquence (ou de la période) du signal de battement entre l'oscillateur étudié et un oscillateur de référence.

La technique présentée ici utilise un comparateur de fréquence à multiplication d'erreur, associé à un dispositif «générateur d'intervalles de temps-étalons» et à un chronomètre de haute résolution (1 ou 10 nanosecondes).

La sensibilité du montage réalisé permet la mesure des instabilités de fréquence aussi faibles que celles affectant les étalons atomiques à vapeur de rubidium ou à jet de césium.

IX,1. Description de la technique expérimentale

IX,1.1. Principe général

L'instabilité dans le domaine temps d'un générateur de fréquence peut être déterminée à l'aide du montage représenté sur la figure 36.

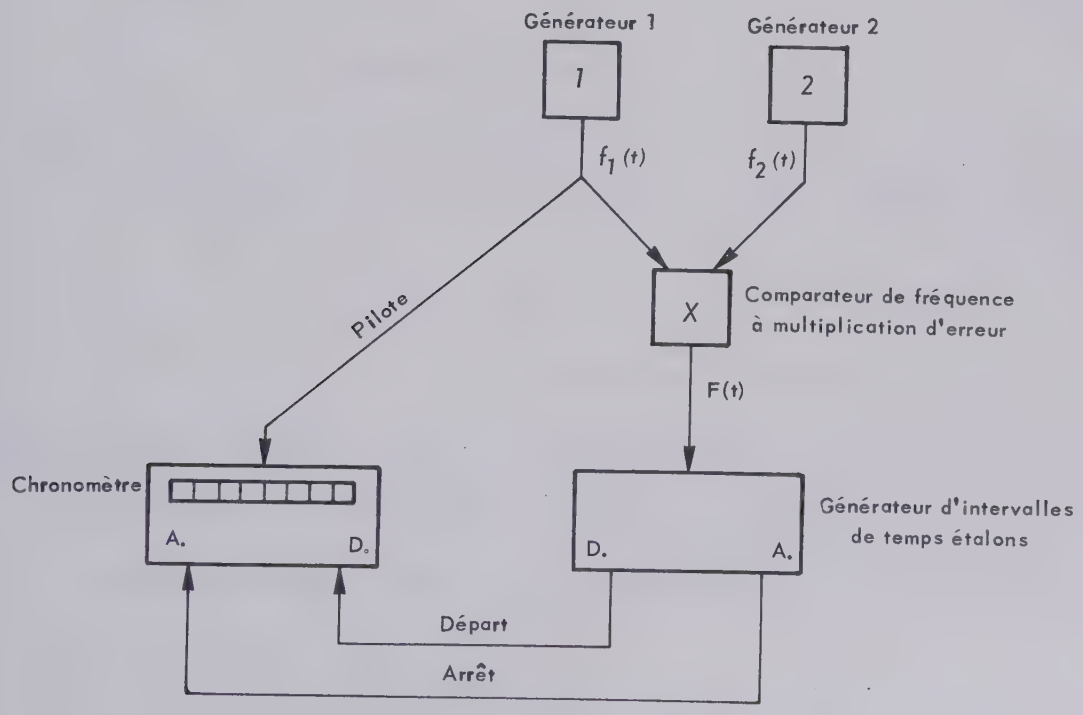


Fig. 36 - Dispositif expérimental pour la détermination de $I(\tau)$

Les générateurs 1 et 2 sont supposés avoir les mêmes propriétés statistiques et être non corrélés. Les signaux émis sont introduits dans un comparateur de fréquence à multiplication d'erreur qui élabore une fréquence $F(t)$ dont les fluctuations sont 10^n fois plus grandes que celles des générateurs de base. Ce signal de fréquence instantanée $F(t)$ pilote un dispositif « générateur d'intervalles de temps étalons » réalisé à l'O.N.E.R.A. qui élabore un train d'impulsions, une durée égale à 10^p périodes du signal d'entrée séparant deux impulsions successives : si $F(t) = 1$ MHz, on prend p variable de 3 à 9, ce qui permet d'obtenir des intervalles de temps τ_0 de 1 ms à 1000 s (valeurs nominales).

Le générateur d'intervalles de temps étalons définit avec une très haute précision les instants «Départ» et «Arrêt» du chronomètre entre lesquels celui-ci mesure la durée de 10^p périodes du signal de fréquence $F(t)$. En affichant la valeur p correspondant à τ_0, l'écart-type des mesures successives de durée permettront le calcul de l'instabilité dans le domaine temps pour la valeur nominale τ_0.

Précisons le fonctionnement des divers appareils utilisés avant d'établir la relation entre $I(\tau)$ et l'écart-type des valeurs lues.

IX,1.2. Appareils utilisés

IX,1.2.1. Comparateur de fréquence à multiplication d'erreur

On ne décrira que la partie utile de l'appareil. Son schéma de principe est représenté sur la figure 37.

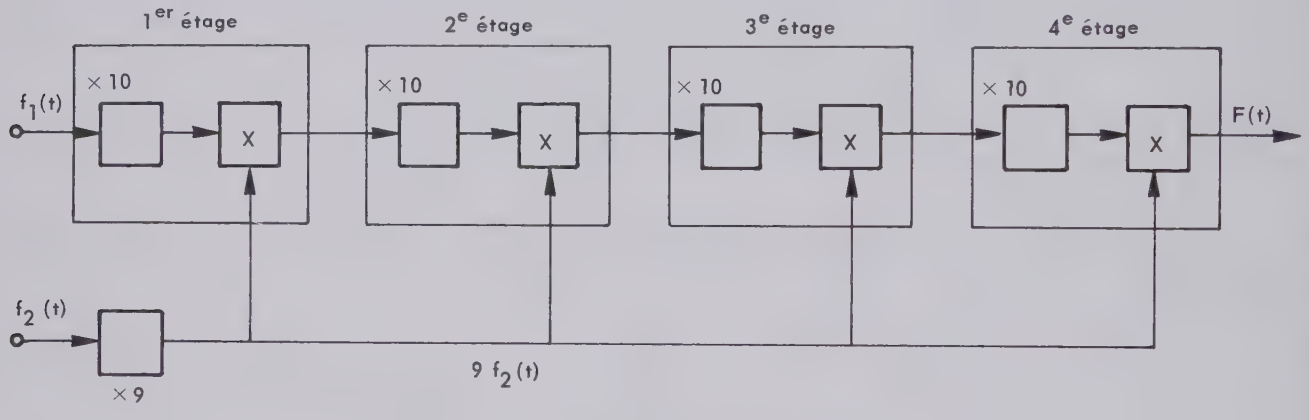


Fig. 37 - Comparateur à multiplicateur d'erreur

La fréquence $f_2(t)$ introduite sur la voie «référence» subit une multiplication par 9. Chaque étage multiplicateur d'erreur est constitué d'un multiplicateur de fréquence par 10, suivi d'un mélange avec la fréquence $9 f_2(t)$; le premier étage est attaqué par la fréquence $f_1(t)$. A chaque étage, les fluctuations de fréquence sont multipliées par 10, et l'on peut démontrer que :

$$F(t) = f_0 + 10^4 \left(\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t) \right) \tag{219}$$

IX,1.2.2. Générateur d'intervalles de temps étalons

Le signal de fréquence $F(t)$ pilote un «générateur d'intervalles de temps étalons» qui élabore des impulsions séparées par la durée correspondant à 10^p périodes du signal d'entrée. Ces impulsions fournissent les ordres «Départ et Arrêt» du chronomètre, ainsi que divers ordres annexes (mise en mémoire, impression des résultats, remise à zéro du chronomètre).

Le schéma de principe est reproduit sur la figure 38 et le diagramme des impulsions émises sur la figure 39.

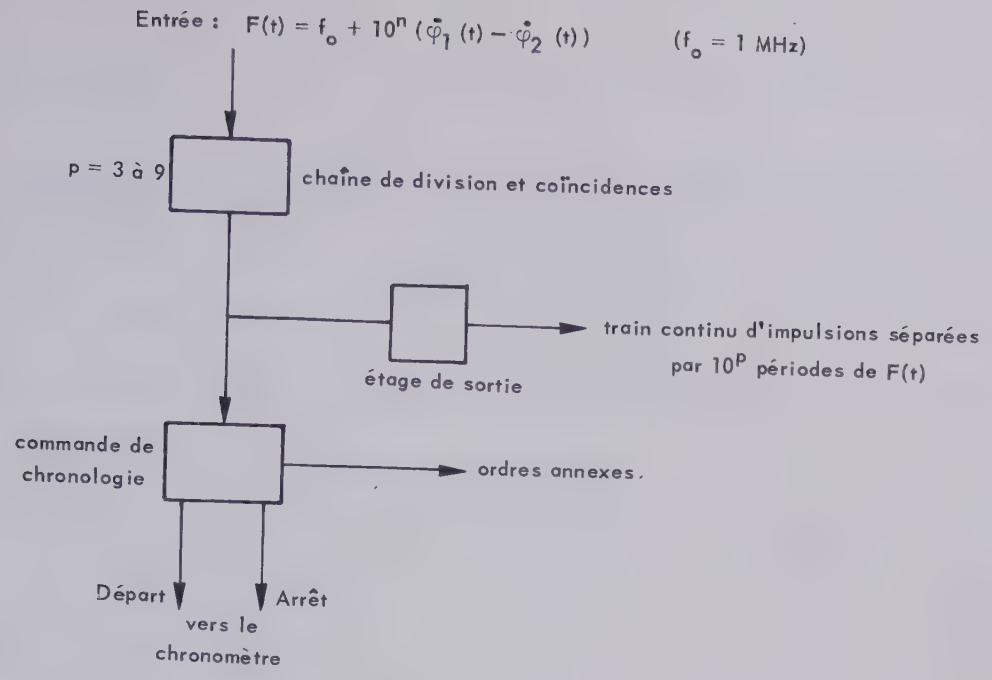


Fig. 38 - Schéma de principe du générateur d'intervalles de temps étalons

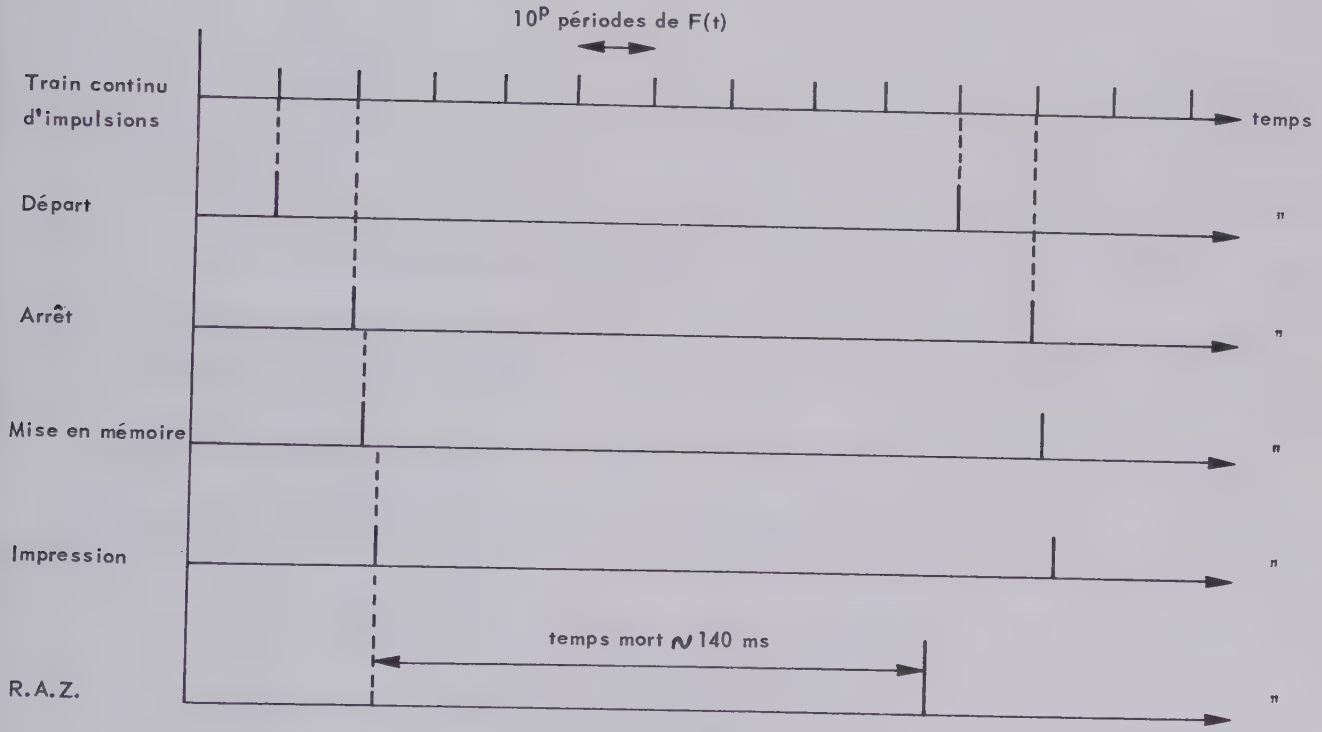


*Fig. 39 - Chronologie des ordres émis**

** figure reproduite d'après le rapport de MULLER (O.N.E.R.A.) : « Générateur de temps étalons ».*

IX,1.2.3. Chronomètre à haute résolution

Le chronomètre utilisé a pour résolution 10 nanosecondes. Cet appareil mesure des intervalles de temps allant de 10 ns à 10 s, la mesure étant effectuée entre les signaux «Départ» et «Arrêt» appliqués sur les entrées respectives.

Après le signal «Départ» se produit une totalisation des impulsions 100 MHz de la base de temps (la fréquence 1 MHz du pilote externe est multipliée par 100). Le processus de comptage cesse après l'arrivée d'une impulsion «Arrêt». Le nombre lu (nombre d'impulsions de la base de temps entre D et A, fig. 40) représente le nombre d'intervalles égaux à 10 ns présent D et A, avec une précision égale à : ± 10 ns ± précision de la base de temps.

Après chaque mesure, l'instrument est remis à zéro pour la mesure suivante.

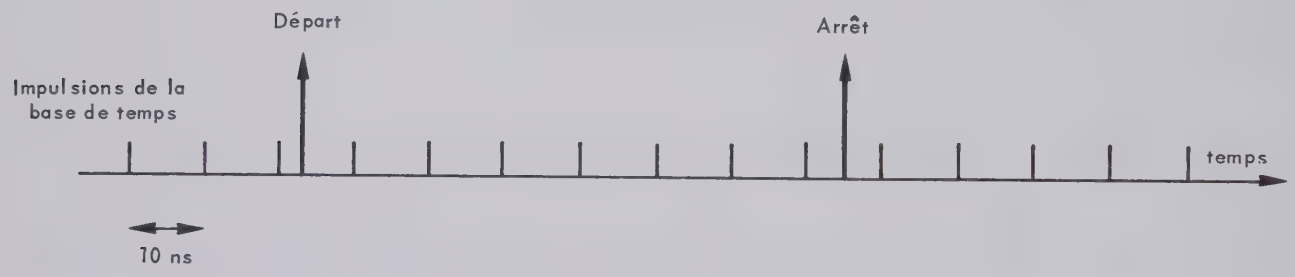


Fig. 40 - Impulsions D et A et base de temps

IX,2. Analyse théorique

IX,2.1. Calcul de la fréquence de sortie du comparateur

Les fréquences instantanées des deux générateurs sont représentées par :

(220) $$f_1(t) = f_1 + \dot{\varphi}_1(t) \qquad f_2(t) = f_2 + \dot{\varphi}_2(t)$$

où les processus aléatoires $\dot{\varphi}_1(t)$ et $\dot{\varphi}_2(t)$ sont de moyenne nulle et statistiquement indépendants.

Le premier étage du comparateur élabore le battement entre $10\, f_1(t)$ et $9\, f_2(t)$, soit la fréquence différence :

$$[10 f_1 + 10 \dot{\varphi}_1(t)] - [9 f_2 + 9 \dot{\varphi}_2(t)] = f_1 + \dot{\varphi}_1(t) + 9(f_1 - f_2) + 9(\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t))$$

Cette fréquence est alors multipliée par 10 puis mélangée avec $9 f_2(t)$ dans le second étage dont la fréquence de sortie vaut :

$$[10 f_1 + 10 \dot{\varphi}_1(t) + 90 (f_1 - f_2) + 90 (\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t))] - [9 f_2 + 9 \dot{\varphi}_2(t)]$$

$$= f_1 + \dot{\varphi}_1(t) + 99 (f_1 - f_2) + 99 (\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t))$$

Un processus analogue (multiplication par 10 et battement avec $9 f_2(t)$) est effectué dans les troisième et quatrième étages multiplicateurs d'erreur.

La fréquence de sortie de l'appareil est alors :

(221) $$F(t) = f_1 + \dot{\varphi}_1(t) + 9999 (f_1 - f_2) + 9999 (\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t))$$

En réglant les oscillateurs pour que $f_1 = f_2 = f_o$, et en approximant $9999\,\dot{\varphi}_2(t)$ par $10^4 . \dot{\varphi}_2(t)$, la fréquence instantanée de sortie s'écrit :

$$F(t) = f_o + 10^4 \left(\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t) \right)$$

Le signal de sortie peut être pris à la sortie d'un étage intermédiaire, aussi écrirons-nous :

(222) $$F(t) = f_o + 10^n \left(\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t) \right)$$

avec $n = 1, 2, 3$ ou 4 selon l'étage de sortie choisi.

IX,2,2. Relation entre $I(\tau)$ et l'écart-type des durées mesurées

Le signal de fréquence $F(t)$ pilote le générateur d'intervalles de temps-étalons qui élabore des durées correspondant à 10^p périodes du signal d'entrée ($p = 3$ à 7 pour $\tau_o = 1$ ms à 10 s).

Pour p fixé, ce sont les fluctuations de τ (autour de sa valeur nominale τ_o) lors des mesures successives qui permettent de calculer l'instabilité $I(\tau_o)$ des générateurs de base.

Introduisons la phase totale $\Phi_T(t)$ du signal de fréquence instantanée $F(t)$:

$$F(t) = f_o + 10^n \left(\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t) \right)$$
$$\Omega(t) = 2\pi F(t) = \omega_o + 10^n \left(\dot{\Phi}_1(t) - \dot{\Phi}_2(t) \right)$$
$$\Phi_T(t) = \omega_o t + 10^n \left(\Phi_1(t) - \Phi_2(t) \right)$$

soit, en posant

(223) $$\Phi_o(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t) \quad ,$$

(224) $$\Phi_T(t) = \omega_o t + 10^n \Phi_o(t)$$

La phase écoulée pendant un intervalle de temps $(t, t+\tau)$ correspondant à 10^p périodes vaut $2\pi . 10^p$, d'où :

$$2\pi . 10^p = \Phi_T(t+\tau) - \Phi_T(t) = \omega_o \tau + 10^n \left(\Phi_o(t+\tau) - \Phi_o(t) \right)$$

(225) $$\frac{2\pi . 10^p}{\omega_o} = \tau_o = \tau + \frac{10^n}{\omega_o} \left(\Phi_o(t+\tau) - \Phi_o(t) \right)$$

où $\tau_o = 10^p T_o = 10^p / f_o$ est la valeur nominale affichée.

Les fluctuations de la durée τ (pour p fixé) étant très faibles devant la valeur nominale τ_o et le temps de corrélation de $\Phi_o(t)$, il est justifié de poser * :

(226) $$\Phi_o(t+\tau) - \Phi_o(t) \simeq \Phi_o(t+\tau_o) - \Phi_o(t)$$
$$\tau_o = \tau + \frac{10^n \tau_o}{\omega_o} \cdot \frac{\Phi_o(t+\tau_o) - \Phi_o(t)}{\tau_o}$$

avec

$$\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau_o} = \frac{1}{\tau_o} \int_t^{t+\tau_o} \dot{\Phi}(\theta)\, d\theta = \frac{\Phi_o(t+\tau_o) - \Phi_o(t)}{\tau_o}$$

---

* *Quelle que soit la technique de détermination de $I(\tau)$, une approximation analogue est indispensable.*

soit :

$$(227)\qquad \frac{\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau_0}}{\omega_0} = -10^{-n}\,\frac{\tau-\tau_0}{\tau_0} = -10^{-(n+p)}\,f_0\,(\tau-\tau_0)$$

En calculant l'écart-type des deux membres, on obtient l'instabilité dans le domaine temps $I'(\tau_0)$ en fonction de l'écart-type des résultats lus sur le chronomètre :

$$(228)\qquad I'(\tau_0) = \frac{\sigma[\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau_0}]}{\omega_0} = 10^{-(n+p)}\,f_0\,\sigma[\tau]$$

$I'(\tau_0)$ a pour origine les instabilités de fréquence des deux oscillateurs de base. La contribution de chacun d'eux est obtenue en utilisant l'hypothèse de l'indépendance statistique :

$$\dot{\phi}_0(t) = \dot{\phi}_1(t) - \dot{\phi}_2(t)$$

$$\langle \dot{\phi}_0 \rangle_{t,\tau_0} = \langle \dot{\phi}_1 \rangle_{t,\tau_0} - \langle \dot{\phi}_2 \rangle_{t,\tau_0}$$

où les variables aléatoires $\langle \dot{\phi}_1 \rangle_{t,\tau_0}$ et $\langle \dot{\phi}_2 \rangle_{t,\tau_0}$ ont même écart-type et sont indépendantes :

$$\sigma^2[\langle \dot{\phi}_0 \rangle_{t,\tau_0}] = \sigma^2[\langle \dot{\phi}_1 \rangle_{t,\tau_0}] + \sigma^2[\langle \dot{\phi}_2 \rangle_{t,\tau_0}]$$

$$= 2\,\sigma^2[\langle \dot{\phi}_1 \rangle_{t,\tau_0}]$$

$$(229)\qquad I'(\tau_0) = \frac{\sqrt{2}\,.\,\sigma[\langle \dot{\phi}_1 \rangle_{t,\tau_0}]}{\omega_0}$$

L'instabilité relative à un seul oscillateur* s'écrit :

$$(230)\qquad \boxed{I(\tau_0) = \frac{\sigma[\langle \dot{\phi}_1 \rangle_{t,\tau_0}]}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,10^{-(n+p)}\,f_0\,\sigma[\tau]}$$

- τ_0 : valeur nominale affichée sur le générateur d'intervalles étalons
- n : multiplication d'erreur ($n = 1, 2, 3, 4$)
- p : 3 à 7 selon que $\tau_0 = 1$ ms, 10 ms, 100 ms, 1 s, 10 s
- f_0 : 10^6 Hz
- $\sigma[\tau]$: écart-type des résultats de mesure.

---

* *Nous avons considéré le paramètre $I(\tau)$ pour la commodité du raisonnement. En fait, les valeurs mesurées sont utilisées pour calculer une estimation de $I(\tau)$ (voir chapitre VIII).*

Quatrième Partie
LE GÉNÉRATEUR SINUSOÏDAL EN TANT QU'INSTRUMENT DE PHYSIQUE

La quatrième partie est consacrée à l'étude d'un problème choisi dans le domaine de l'instrumentation scientifique : la détermination des effets du bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation sur la sensibilité d'un spectromètre pour résonance paramagnétique électronique (R.P.E.).

L'analyse détaillée qui sera développée dans le chapitre XI possède l'avantage d'utiliser une caractérisation précise du signal d'excitation.

Chapitre X
OBSERVATION D'UN PHÉNOMÈNE SPECTROSCOPIQUE : LA RÉSONANCE PARAMAGNÉTIQUE ÉLECTRONIQUE

Parmi les nombreux phénomènes de nature spectroscopique rencontrés en physique, nous avons choisi de traiter la résonance paramagnétique électronique qui présente l'intérêt suivant : la fréquence de la transition quantique est fonction d'un champ magnétique continu appliqué ; de ce fait, il est possible, d'une part de choisir cette fréquence égale à celle du générateur d'excitation, donc d'utiliser des générateurs à fréquence fixe (et les générateurs très stables sont le plus souvent à fréquence fixe), d'autre part de moduler le phénomène par une simple modulation du champ magnétique.

En outre, cet exemple présente d'autant plus d'intérêt que le spectromètre qui sera étudié, se comporte dans son mode «dispersion» comme un discriminateur hyperfréquence permettant l'étude du bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation [48, 58].

Après un bref rappel sur le phénomène de R.P.E., on évoque le problème de son observation en insistant sur la notion de sensibilité des spectromètres.

On considère enfin les effets des variations lentes qui affectent la fréquence de résonance de la cavité de mesure (bruit «flicker»).

X,1. Rappel sur la R.P.E. et son observation

Le paramagnétisme électronique d'une substance peut être mis en évidence en soumettant l'échantillon à l'action simultanée [49] :

- d'un champ magnétique continu H ;
- d'un champ magnétique alternatif H_1, de fréquence f_o, perpendiculaire à H.

Lorsque H prend la valeur H_o telle que :

(231) $2\pi f_o = \gamma_e H_o$ (γ_e : rapport gyromagnétique de l'électron)

se produit une modification des propriétés magnétiques de la substance, résultant du mouvement des moments magnétiques électroniques sous l'action des deux champs.

L'interaction onde électromagnétique-matière se traduit par :

- une absorption d'énergie prise au champ électromagnétique par la matière ;
- une variation de l'indice de réfraction de la matière (phénomène de dispersion).

Dans le domaine hertzien, cette interaction se traduit macroscopiquement par une modification des propriétés d'un résonateur contenant l'échantillon paramagnétique. Avec des moments magnétiques dus aux spins électroniques et un champ magnétique continu de quelques milliers de gauss, la fréquence f_o est dans la gamme hyperfréquence ; le résonateur est alors une cavité résonante.

Cette cavité est incorporée dans un circuit permettant de détecter la variation Δf_o de sa fréquence de résonance f_o, et la variation ΔQ_o de son cœfficient de qualité Q_o, reliées respectivement à la partie réelle $\chi'(H)$ et à la partie imaginaire $\chi''(H)$ de la susceptibilité complexe de l'échantillon $\chi(H) = \chi'(H) - i\chi''(H)$:

(232)
$$\Delta f_o \simeq -\frac{\eta}{2} f_o \chi'(H)$$
$$\Delta Q_o \simeq -\eta Q_o^2 \chi''(H)$$

(η : cœfficient de remplissage fonction de la géométrie de l'échantillon et de la répartition du champ électromagnétique dans la cavité).

Les équations de Bloch, valables dans un grand nombre de cas, permettent de déduire les expressions suivantes [49] :

(233)
$$\chi'(H) = \frac{\chi_o}{2} \omega_o T_2 \frac{\gamma T_2 (H_o - H)}{1 + \gamma^2 T_2^2 (H - H_o)^2}$$
$$\chi''(H) = \frac{\chi_o}{2} \omega_o T_2 \frac{1}{1 + \gamma^2 T_2^2 (H - H_o)^2}$$

(γ : rapport gyromagnétique ; χ_o : susceptibilité statique ; T_2 : temps de relaxation spin-spin ; $\omega_o = 2\pi f_o = \gamma H_o$).

Le problème spectroscopique se ramène à un problème radioélectrique qui est la mise en évidence des variations Δf_o et ΔQ_o, réalisée en excitant la cavité contenant l'échantillon par le signal issu d'un oscillateur de fréquence moyenne f_o.

X,2. *Un spectromètre hyperfréquence à pont*

Nous étudierons en détail le spectromètre représenté sur la figure 41, pour lequel on supposera la fréquence moyenne d'excitation égale à la fréquence de la cavité de mesure.

Sa structure est suffisamment complète pour permettre d'étudier la différence entre l'observation de l'absorption et celle de la dispersion.

Le champ magnétique H_1 est créé dans la cavité par le signal hyperfréquence issu de l'oscillateur d'excitation. Le détecteur synchrone permet l'observation, soit de l'absorption, soit de la dispersion, selon le réglage du déphaseur placé dans la voie de référence.

Un procédé classique pour l'observation du phénomène de R.P.E., consiste à moduler en basse fréquence le champ magnétique continu. Cette modulation ne sera pas introduite ici ; le signal de R.P.E. sera alors une composante continue au lieu d'être une composante sinusoïdale B.F. Les effets de la modulation seront considérés plus loin.

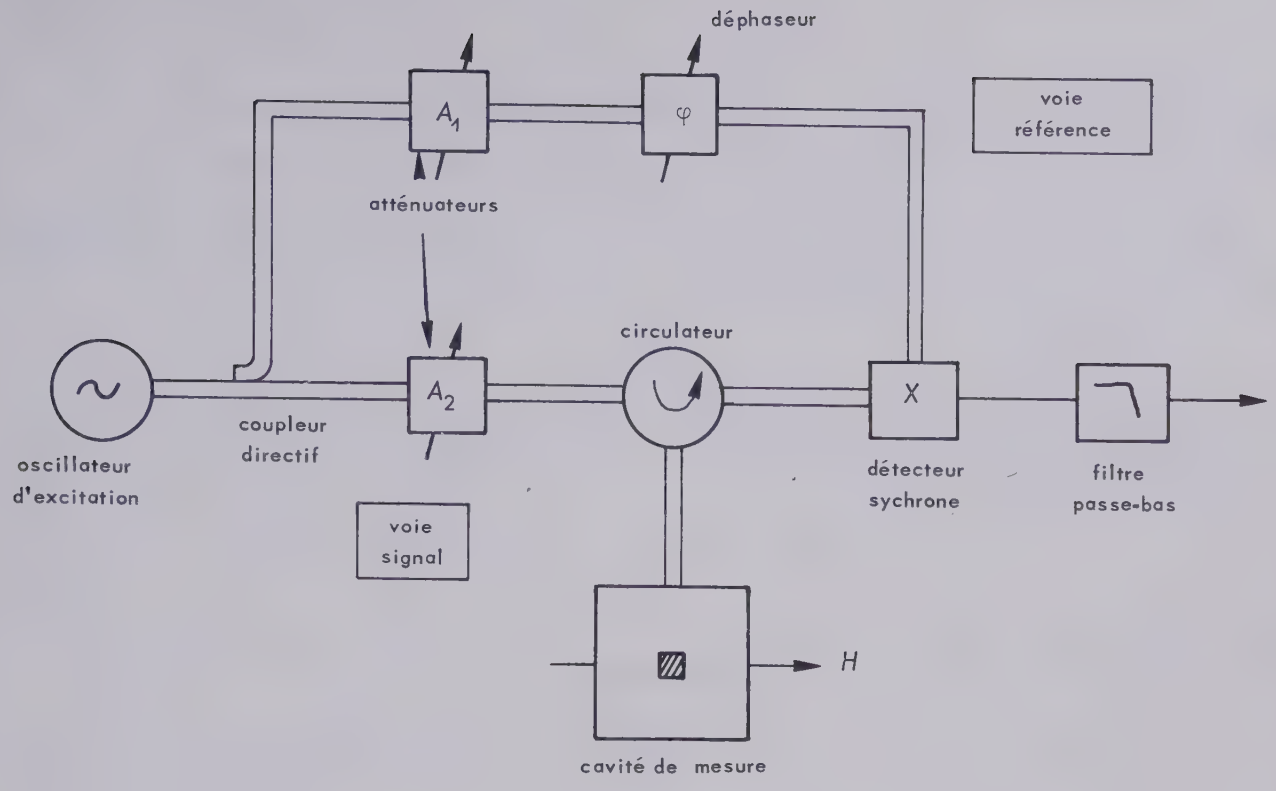


Fig. 41 - Spectromètre hyperfréquence à pont

X,3. Sensibilité d'un spectromètre [50]

Les différentes sources de bruit présentes dans un spectromètre font que le signal de résonance magnétique est détecté avec un certain niveau de bruit, ce qui permet de définir la sensibilité, c'est-à-dire la plus faible valeur χ'_{min} où χ''_{min} détectable. Notre objet n'est pas d'effectuer une étude exhaustive des facteurs qui affectent le rapport signal/ bruit, mais d'étudier principalement le rôle du bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation (voir le tableau VI en fin de chapitre).

L'expression classique de la sensibilité obtenue en ne considérant que le bruit thermique prenant naissance dans la cavité de mesure s'écrit :

(234)
$$\frac{\eta}{2}\chi'_{min} \quad \text{ou} \quad \frac{\eta}{2}\chi''_{min} = \frac{1}{Q_0}\sqrt{\frac{F_R\, k\, T\, \Delta\nu}{P_i}}$$

P_i est la puissance incidente sur la cavité ; F_R est le facteur de bruit du récepteur et $\Delta\nu$ sa bande passante.

Le facteur de bruit d'un récepteur est une mesure du bruit qu'il introduit et est défini par :

$$F_R = \frac{\textit{rapport S/B en puissance à l'entrée du récepteur}}{\textit{rapport S/B en puissance à la sortie du récepteur}}$$

En spectroscopie hyperfréquence, le bruit du récepteur est généralement très supérieur au bruit thermique de la cavité.

Le spectre du signal utile est concentré autour d'une fréquence particulière*, alors que le spectre de bruit s'étend sur toute la largeur de bande du système. Le rapport signal/ bruit peut être augmenté en diminuant la largeur de bande, dans la mesure où cela n'altère pas l'information cherchée.

---

* *C'est la fréquence zéro en absence de modulation basse-fréquence.*

Comme des filtres passe-bande très étroits ne sont pas réalisables à la fréquence signal, les informations souhaitées sont translatées autour de la fréquence zéro où le filtrage est accompli à l'aide d'un filtre passe-bas.

Avec une détection synchrone, la largeur de bande est définie par la fréquence de coupure du filtre [51].

X,4. Bruit thermique de la cavité en tant que bruit additif externe de l'oscillateur d'excitation

Le bruit thermique prenant naissance dans la cavité de mesure joue un rôle essentiel dans l'expression de la sensibilité du spectromètre (équation 234).

Dans le cadre de cette étude des effets du bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation, il est intéressant de le traiter comme étant un bruit additif externe de l'oscillateur d'excitation [52].

X,4.1. Sans R.P.E.

Soit un signal $A_0 \cos \omega_0 t$ incident sur la cavité. Si la cavité est adaptée à la fréquence $f_0 = \omega_0/2\pi$, la puissance réfléchie est nulle. Si la cavité résonne à f'_0 et est désadaptée à cette fréquence, son cœfficient de réflexion vaut approximativement :

$$\Gamma(f) = 1 - \alpha + i\, 2Q_0 \frac{f - f'_0}{f'_0}$$

(α : cœfficient de couplage).

Le signal réfléchi comporte alors deux termes en quadrature

$$(1-\alpha)\, A_0 \cos \omega_0 t + 2Q_0 \frac{f_0 - f'_0}{f'_0} A_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

A ces deux termes sinusoïdaux doit être additionnée la tension de bruit thermique $n_e(t)$ de la cavité de la mesure :

$$n_e(t) = n_{ep}(t) \cos \omega_0 t - n_{eq}(t) \sin \omega_0 t$$

avec les propriétés classiques déjà utilisées au chapitre V :

$$\begin{cases} S_{n_{ep}}(f) \equiv S_{n_{eq}}(f) \\ S_{n_e}(f) = \dfrac{S_{n_{ep}}(f+f_0) + S_{n_{ep}}(f-f_0)}{2} \end{cases}$$

Dans le cas du bruit thermique, en supposant la cavité et le récepteur adaptés au guide, la densité spectrale de puissance de $n_e(t)$ s'écrit :

$$(235) \qquad S_{n_e}(f) = \frac{\frac{1}{2} kTR}{1 + 4Q_0^2 \left(\frac{f+f_0}{f_0}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2} kTR}{1 + 4Q_0^2 \left(\frac{f-f_0}{f_0}\right)^2}$$

Le spectre à fréquences positives de $n_{ep}(t)$ ou $n_{eq}(t)$ est alors :

$$(236) \qquad \boxed{S_{n_{ep}}(f) \equiv S_{n_{eq}}(f) = \frac{2kTR}{1 + \left(2Q_0 \frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

($f_0/2Q_0$ est de l'ordre du mégahertz pour une cavité hyperfréquence).

Le signal total réfléchi par la cavité s'écrit :

(237)
$$v_R(t) = \left[(1-\alpha)A_o + n_{ep}(t)\right] \cos\omega_o t - \left[2Q_o \frac{f_o - f'_o}{f_o} A_o + n_{eq}(t)\right] \sin\omega_o t$$

X,4.2. Avec R.P.E. - Sensibilité ultime du spectromètre

En supposant la cavité initialement adaptée ($\alpha = 1$) à la fréquence f_o , le phénomène de R.P.E. se traduit par un cœfficient de réflexion supplémentaire donné par l'expression (pour la fréquence f_o) :

$$\Gamma_{RPE}(f_o) \simeq \frac{\eta Q_o}{2} \chi'' + i \frac{\eta Q_o}{2} \chi' \qquad \text{(voir équation (257))}$$

Le signal total réfléchi par la cavité est alors :

(238) $$v_R(t) = \left[\frac{\eta Q_o}{2} \chi'' A_o + n_{ep}(t)\right] \cos\omega_o t - \left[\frac{\eta Q_o}{2} \chi' A_o + n_{eq}(t)\right] \sin\omega_o t$$

Le réglage du signal de référence permet d'observer :

soit χ'' si $v_{réf.}(t) = A_{réf} \cos\omega_o t$

soit χ' si $v_{réf}(t) = - A_{réf.} \sin\omega_o t$

La partie basse-fréquence de la tension après détection synchrone s'écrit alors, selon le cas :

(239) $$v_{\chi'}(t) = \beta_o \left[\frac{\eta Q_o}{2} \chi' A_o + n_{eq}(t)\right]$$

(240) $$v_{\chi''}(t) = \beta_o \left[\frac{\eta Q_o}{2} \chi'' A_o + n_{ep}(t)\right]$$

($\beta_o = K A_{réf} / 2$; K : constante du détecteur synchrone).

Après le filtre passe-bas dont la bande passante $\Delta\nu$ est généralement de l'ordre de un hertz, la sensibilité s'obtient en écrivant :

$$\frac{\eta Q_o}{2} \chi'_{min} \sqrt{2 P_i R} = \sqrt{2kTR\Delta\nu} \qquad P_i = A_o^2/2R$$

$$\frac{\eta Q_o}{2} \chi''_{min} \sqrt{2 P_i R} = \sqrt{2kTR\Delta\nu}$$

Soit, en tenant compte du facteur de bruit F_R du récepteur :

(241) $$\frac{\eta}{2} \chi'_{min} \text{ ou } \frac{\eta}{2} \chi''_{min} = \frac{1}{Q_o} \sqrt{\frac{F_R kT \Delta\nu}{P_i}}$$

X,5. Effets des variations lentes de la fréquence de résonance de la cavité de mesure. Influence sur la sensibilité

Jusqu'à présent, nous avons supposé que la fréquence de résonance de la cavité était constante dans le temps (f_o en absence de R.P.E.). En fait, elle possède toujours des fluctuations lentes dont le spectre varie sensiblement en $1/f$ pour les très basses fréquences.

Il est commode de la représenter par :

(242) $$f_R(t) = f_o + \Delta f_o(t)$$

où $\Delta f_o(t)$ est le processus aléatoire $\dot{\phi}_D(t)$ introduit au chapitre VI pour l'étude du bruit de scintillation de fréquence (la notation $\Delta f_o(t)$ est utilisée pour rappeler qu'il ne s'agit pas ici des fluctuations de la fréquence d'un signal, mais des fluctuations de la fréquence de résonance d'un résonateur passif).

Le cœfficient de réflexion de la cavité (supposée adaptée à la résonance) s'écrit alors :

$$\Gamma(f,t) \simeq i Q_o \frac{f - f_R(t)}{f_R(t)}$$

soit, au premier ordre en $\Delta f_o(t)$:

(243) $$\boxed{\Gamma(f,t) \simeq i Q_o \frac{f-f_o}{f_o} - i Q_o \frac{\Delta f_o(t)}{f_o}}$$

En notant $A_o \cos \omega_o t$ le signal incident sur la cavité, le signal réfléchi s'écrit :

$$v_R(t) = Q_o \frac{\Delta f_o(t)}{f_o} A_o \sin \omega_o t$$

En présence du phénomène de R.P.E., le signal réfléchi est alors :

(244) $$v_R(t) = \frac{\eta Q_o}{2} \chi'' A_o \cos \omega_o t - \left(\frac{\eta \chi'}{2} - \frac{\Delta f_o(t)}{f_o} \right) Q_o A_o \sin \omega_o t$$

Le déphaseur étant réglé pour l'observation de la dispersion, la tension B.F. à la sortie du détecteur synchrone est (fig. 42) :

(245) $$\boxed{v_{\chi'}(t) = \beta_o \left[\frac{\Delta f_o(t)}{f_o} - \frac{\eta \chi'}{2} \right] Q_o A_o}$$

Le bruit «flicker» de fréquence de la cavité de mesure intervient ainsi directement pour limiter l'observation de la dispersion*.

---

* *L'observation de l'absorption n'est pas affectée, car en première approximation, la cavité a été supposée adaptée à la résonance.*

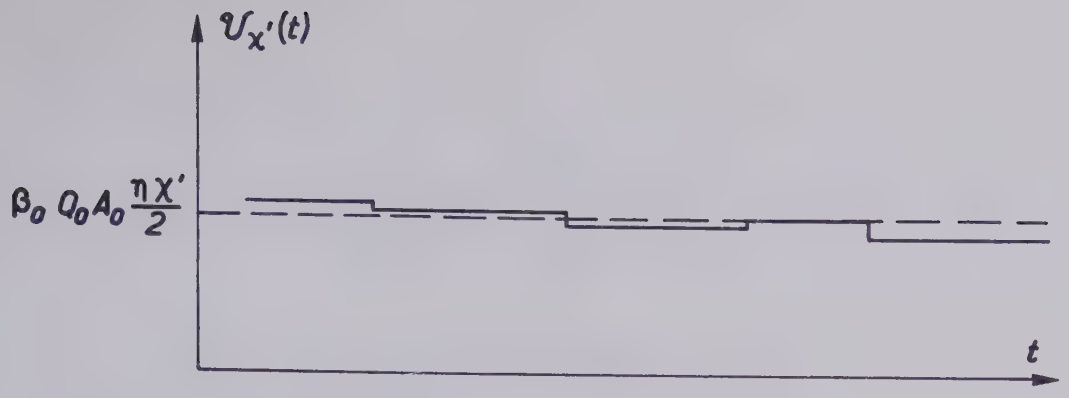


Fig. 42 - Tension B.F. créée par le bruit «flicker» de cavité

La contribution de ce bruit à la sensibilité s'écrit :

$$\frac{1}{f_0}\left(\int_0^{\Delta\nu} S_{\Delta f_0}(f)\, df\right)^{1/2}$$

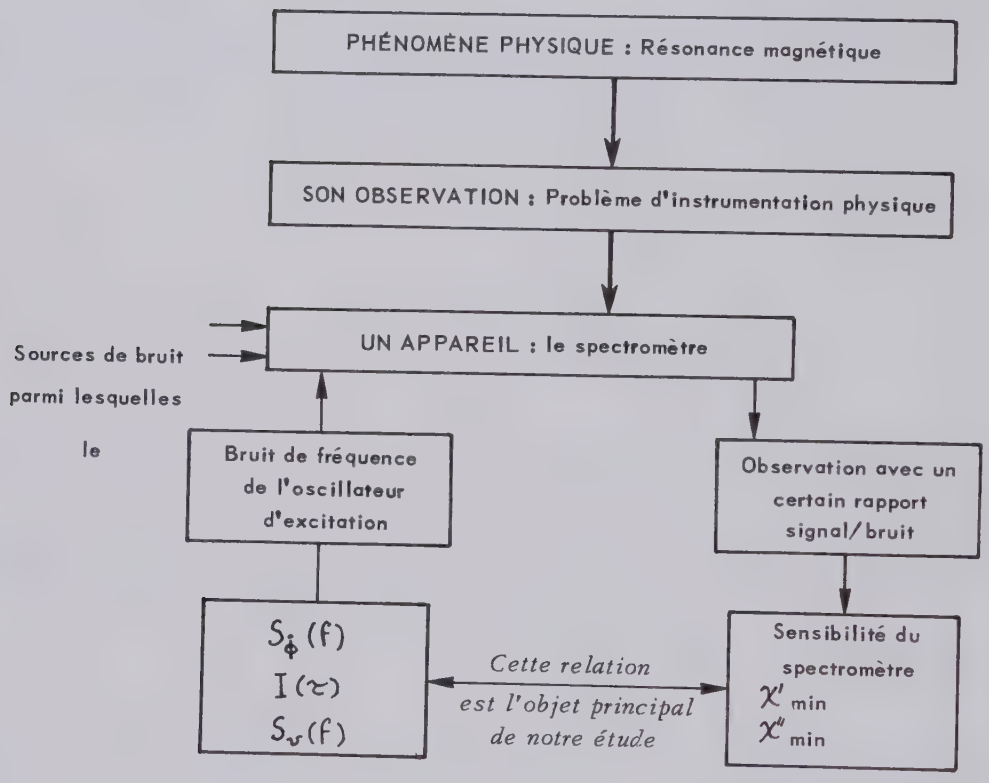
où $S_{\Delta f_0}(f)$ est la densité spectrale de puissance des fluctuations $\Delta f_0(t)$ (équation 134), et $\Delta\nu$ la bande passante du récepteur.

La sensibilité liée aux deux bruits de cavité étudiés (thermique et «flicker») s'écrit :

(246)
$$\frac{\eta}{2}\chi'_{min} = \sqrt{\frac{F_R\, k\, T\, \Delta\nu}{Q_0^2\, P_i} + \frac{1}{f_0^2}\int_0^{\Delta\nu} S_{\Delta f_0}(f)\, df}$$

Le chapitre XI est consacré à l'étude détaillée des effets du bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation.

TABLEAU VI - POSITION DU PROBLÈME TRAITÉ AU CHAPITRE XI



Chapitre XI
EFFETS DU BRUIT DE FRÉQUENCE DE L'OSCILLATEUR D'EXCITATION SUR L'OBSERVATION DE LA R.P.E.

Les limitations apportées par le bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation sur l'observation de la R.P.E. sont étudiées en effectuant le calcul :

(1) de la puissance hyperfréquence réfléchie par la cavité de mesure ;

(2) des termes de basses fréquences délivrés par le détecteur synchrone ;

(3) de la sensibilité en dispersion et en absorption.

En outre, les résultats obtenus permettront de montrer dans quelle mesure la spectroscopie hertzienne peut être un moyen d'étude du bruit des oscillateurs.

XI,1. Puissance hyperfréquence réfléchie par la cavité de mesure

Cette analyse a pour but le calcul de la puissance hyperfréquence contenue dans les différents termes (signaux de R.P.E. et bruits), après réflexion du signal incident sur la cavité de mesure.

XI,1.1. Cœfficients de réflexion de la cavité de mesure

La densité spectrale de puissance $S_{v_R}(f)$ du signal réfléchi est donnée en fonction de celle du signal incident $S_{v_i}(f)$ par la relation [20] :

(247) $$S_{v_R}(f) = |\Gamma(f)|^2 S_{v_i}(f)$$

où $\Gamma(f)$ est le cœfficient de réflexion de la cavité.

La puissance totale réfléchie est alors :

(248) $$P_R = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{v_R}(f)\, df$$

XI,1.1.1. $\Gamma(f)$ sans R.P.E.

Une cavité résonnant à la fréquence f_o, de cœfficient de qualité Q_o, a pour cœfficient de réflexion :

(249) $$\Gamma(f) = \frac{1 - \alpha + i\, 2Q_o \frac{f - f_o}{f_o}}{1 + \alpha + i\, 2Q_o \frac{f - f_o}{f_o}}$$

(α : cœfficient de couplage).

Si la cavité est adaptée ($\alpha = 1$) :

(250)
$$|\Gamma(f)|^2 = \frac{\frac{Q_o^2}{f_o^2}(f-f_o)^2}{1+\frac{Q_o^2}{f_o^2}(f-f_o)^2}$$

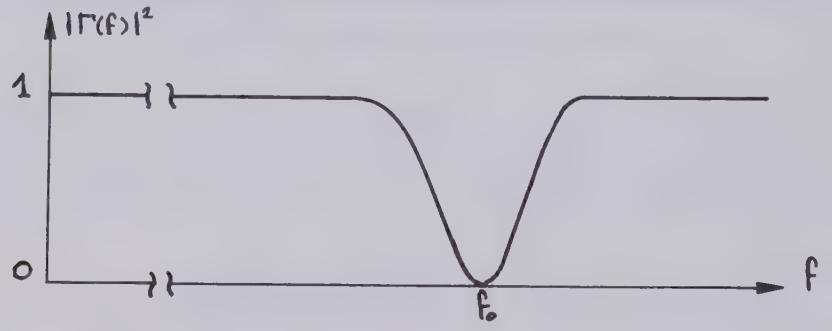


Fig. 43 - Cœfficient de réflexion sans R.P.E. (α = 1)

XI,1.1.2. Γ' (f) avec R.P.E.

Le phénomène de R.P.E. se traduit par une variation de la self L du circuit électrique équivalent à la cavité, qui devient :

$$L' = L(1+\eta\chi)$$

L'impédance du résonateur

$$Z_R = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

devient

(251)
$$Z'_R = \left(R + L\omega\eta\chi''\right) + i\left[L\omega(1+\eta\chi') - \frac{1}{C\omega}\right]$$

Il en résulte :

• une nouvelle fréquence de résonance :

(252)
$$f'_o = \frac{f_o}{\sqrt{1+\eta\chi'}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta f_o \simeq -\frac{\eta}{2} f_o \chi'}$$

• un nouveau cœfficient de qualité :

(253)
$$Q'_o = \frac{L\omega_o}{R + L\omega\eta\chi''} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta Q_o \simeq -\eta Q_o^2 \chi''}$$

• un nouveau cœfficient de couplage :

(254)
$$\alpha' = \frac{n^2 Z}{R + L\omega\eta\chi''} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta\alpha \simeq -\eta Q_o \chi''}$$

(n : rapport de transformation du transformateur représentant l'iris de couplage ; Z : impédance caractéristique du guide).

Le cœfficient de réflexion de la cavité en présence de R.P.E. est alors :

$$\Gamma'(f) = \frac{1 - \alpha' + i\,2\,Q'_o \dfrac{f - f'_o}{f'_o}}{1 + \alpha' + i\,2\,Q'_o \dfrac{f - f'_o}{f'_o}}$$

soit :

(255)
$$\Gamma''(f) = \frac{\eta Q_o \chi'' + i\,2\,\dfrac{Q_o(1 - \eta Q_o \chi'')}{f_o\left(1 - \frac{\eta}{2}\chi'\right)}\,(f - f'_o)}{2 - \eta Q_o \chi'' + i\,2\,\dfrac{Q_o(1 - \eta Q_o \chi'')}{f_o\left(1 - \frac{\eta}{2}\chi'\right)}\,(f - f'_o)}$$

En utilisant le fait que $\eta Q_o \chi''$ et $\frac{\eta}{2}\chi'$ sont très inférieurs à l'unité,

(256)
$$\Gamma'(f) \simeq \frac{\frac{\eta Q_o}{2}\chi'' + i\,\frac{\eta Q_o}{2}\chi' + i\,\frac{Q_o}{f_o}(f - f_o)}{1 + i\,\frac{\eta Q_o}{2}\chi' + i\,\frac{Q_o}{f_o}(f - f_o)}$$

A la fréquence f_o , en ne gardant que les termes du premier ordre en χ' et en χ'' :

(257)
$$\Gamma'(f_o) \simeq \frac{\eta Q_o}{2}\chi'' + i\,\frac{\eta Q_o}{2}\chi'$$

(258)
$$|\Gamma'(f_o)|^2 \simeq \left(\frac{\eta Q_o}{2}\chi''\right)^2 + \left(\frac{\eta Q_o}{2}\chi'\right)^2$$

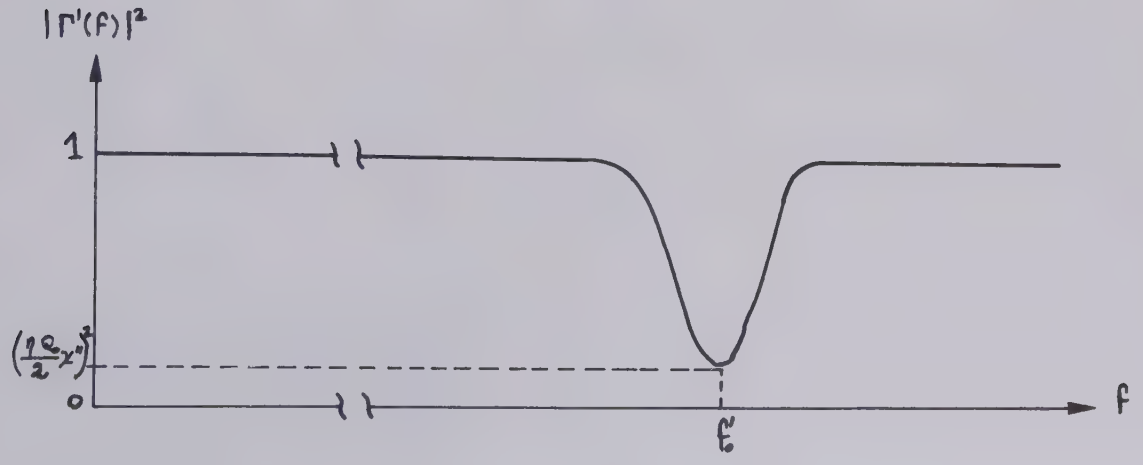


Fig. 44 - Cœfficient de réflexion avec R.P.E.

XI,1.2. Signal d'excitation idéal

Afin de pouvoir estimer la dégradation due au bruit de fréquence, on calcule la puissance réfléchie par la cavité dans le cas de l'oscillateur idéal :

$$S_{v_i}(f) = P_i \, \delta(f - f_0)$$

XI,1.2.1. P_R sans R.P.E. (cavité adaptée à f_0)

La puissance réfléchie est évidemment nulle :

$$P_R = P_i \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(f)|^2 \, \delta(f - f_0) \, df = 0 \tag{259}$$

XI,1.2.2. P'_R avec R.P.E.

$$P'_R = P_i \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma'(f)|^2 \, \delta(f - f_0) \, df$$

$$P'_R = P_i \, |\Gamma'(f_0)|^2$$

En utilisant l'expression approchée (258) :

$$\boxed{P'_R = P_i \left[\left(\frac{\eta Q_0}{2} \chi' \right)^2 + \left(\frac{\eta Q_0}{2} \chi'' \right)^2 \right]} \tag{260}$$

On trouve les deux termes classiques correspondant à la dispersion et à l'absorption.

XI,1.2.3. P_R compte-tenu de $\Delta f_0(t)$

Supposons que la fréquence de résonance de la cavité fluctue selon un processus aléatoire $\Delta f_0(t)$ stationnaire de moyenne nulle, ayant pour spectre par exemple (voir paragraphe X,5 et chapitre VI) :

$$S_{\Delta f_0}(f) = \frac{2\pi A' \, q'^{2\varepsilon'}}{(q'^2 + 4\pi^2 f^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon'}} \qquad (f \geq 0)$$

Le carré du module du coefficient de réflexion donné par l'équation (243) est alors fonction du temps :

$$|\Gamma(f,t)|^2 = \frac{Q_0^2}{f_0^2}(f - f_0)^2 - 2\frac{Q_0^2}{f_0^2}(f - f_0)\Delta f_0(t) + \frac{Q_0^2}{f_0^2}\Delta f_0^2(t) \tag{261}$$

Pour une valeur donnée f de la fréquence, $|\Gamma(f,t)|^2$ possède une moyenne temporelle* :

$$\boxed{\overline{|\Gamma(f,t)|^2} = \frac{Q_0^2}{f_0^2}(f - f_0)^2 + \frac{Q_0^2}{f_0^2}\overline{\Delta f_0^2(t)}} \tag{262}$$

---

* *La barre désigne la moyenne temporelle*

avec :

$$(263)\qquad \overline{\Delta f_o^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\Delta f_o}(f)\,df = \frac{\sqrt{\pi}\,A'\,\Gamma_e(\varepsilon')}{\Gamma_e(\varepsilon'+\frac{1}{2})}$$

(on note ici la fonction Eulérienne gamma par le symbole Γ_e pour ne pas confondre avec le cœfficient de réflexion Γ).

Si le signal incident a pour spectre $P_i\,\delta(f-f_o)$, la puissance moyenne réfléchie par la cavité s'écrit :

$$P_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{Q_o^2}{f_o^2}(f-f_o)^2 + \frac{Q_o^2}{f_o^2}\,\frac{\sqrt{\pi}\,A'\,\Gamma_e(\varepsilon')}{\Gamma_e(\varepsilon'+\frac{1}{2})} \right] P_i\,\delta(f-f_o)\,df$$

$$(264)\qquad \boxed{P_R = \frac{Q_o^2}{f_o^2}\,\frac{\sqrt{\pi}\,A'\,\Gamma_e(\varepsilon')}{\Gamma_e(\varepsilon'+\frac{1}{2})}\,P_i}$$

Cette expression montre que, même si la cavité est en moyenne accordée, il existe une puissance réfléchie créée par les fluctuations de la fréquence de résonance de la cavité ; sa valeur est proportionnelle au cœfficient A' du spectre de ces fluctuations.

XI,1.3. Signal d'excitation à phase stationnaire

Dans ce cas, le spectre de radiofréquences du signal incident s'écrit :

$$(29)\qquad S_{v_i}(f) = P_i\,e^{-\overline{\phi^2}} \left\{ \delta(f-f_o) + S_\phi(f-f_o) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \right]_{f_o} \right\}$$

La puissance incidente transportée dans les bandes latérales de bruit est : $P_{Bi} = P_i\,(1-e^{-\overline{\phi^2}})$

XI,1.3.1. P_R sans R.P.E. (cavité adaptée à fo)

$$S_{v_R}(f) = \left(1 - \frac{1}{1+\frac{Q_o^2}{f_o^2}(f-f_o)^2} \right) S_{v_i}(f)$$

$$(265)\qquad P_R = P_i - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{Q_o^2}{f_o^2}(f-f_o)^2}\,S_{v_i}(f)\,df$$

Le calcul de l'intégrale nécessite la connaissance de $S_\phi(f)$. Un calcul approché est néanmoins possible sans spécifier $S_\phi(f)$ en supposant que $S_{v_i}(f)$ ne prend des valeurs notables que dans la zone proche de f_o où l'approximation suivante est valable :

$$(266)\qquad |\Gamma(f)|^2 \simeq \frac{Q_o^2}{f_o^2}(f-f_o)^2$$

$$P_R = \frac{Q_o^2}{f_o^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_o)^2\,S_{v_i}(f)\,df$$

En utilisant la relation suivante démontrée dans l'annexe n° 6

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_o)^2 \, S_{v_i}(f)\, df = \frac{P_i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f)\, df$$

il vient* :

(267)
$$P_R = \frac{P_i\, Q_o^2}{4\pi^2 f_o^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f)\, df$$

Cette puissance correspond à la réflexion des bandes latérales de bruit sur la cavité adaptée à f_o . La puissance porteuse est entièrement dissipée dans la cavité. Dans l'approximation (266), la puissance totale de bruit réfléchie liée au bruit de fréquence de l'oscillateur, est donc proportionnelle à $\overline{\phi^2(t)}$.

XI,1.3.2. P'_R avec R.P.E.

Nous supposerons également que $S_{v_i}(f)$ ne prend des valeurs notables que dans la zone proche de la résonance où $|\Gamma'(f)|^2$ est parabolique (voir (255)) :

(268)
$$|\Gamma'(f)|^2 \simeq \left(\frac{\eta Q_o}{2}\chi''\right)^2 + \frac{Q_o^2}{f_o^2}(f-f'_o)^2 \qquad f_o - f'_o = \frac{\eta}{2} f_o \chi'$$

La puissance totale réfléchie comprend un terme P'_{SR} correspondant au signal de R.P.E., et un terme P'_{BR} correspondant à la réflexion des bandes latérales de bruit :

$$P'_{SR} = P_i\, e^{-\overline{\phi^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\eta Q_o}{2}\chi''\right)^2 + \frac{Q_o^2}{f_o^2}(f-f'_o)^2 \right] \delta(f-f_o)\, df$$

(269)
$$P'_{SR} = P_i\, e^{-\overline{\phi^2}} \left[\left(\frac{\eta Q_o}{2}\chi'\right)^2 + \left(\frac{\eta Q_o}{2}\chi''\right)^2 \right]$$

Le facteur $e^{-\overline{\phi^2}}$ diffère par rapport à l'expression (260), et traduit une diminution de la puissance du signal de R.P.E.

En notant :

$$S_B(f-f_o) = P_i e^{-\overline{\phi^2}} \left\{ S_\phi(f-f_o) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f) \right]_{f_o} \right\}$$

avec
$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_B(f-f_o)\, df = P_{Bi} = P_i \left(1 - e^{-\overline{\phi^2}}\right)$$

la puissance de bruit réfléchie est :

$$P'_{BR} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\eta Q_o}{2}\chi''\right)^2 + \frac{Q_o^2}{f_o^2}(f-f'_o)^2 \right] S_B(f-f_o)\, df$$

$$P'_{BR} = \left(\frac{\eta Q_o}{2}\chi''\right)^2 P_i \left(1 - e^{-\overline{\phi^2}}\right) + \frac{Q_o^2}{f_o^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (f-f'_o)^2\, S_B(f-f_o)\, df$$

---

* *Expression établie antérieurement par* **Décailliot** *de façon plus intuitive* [53].

On calcule l'intégrale en utilisant l'identité :

$$(f-f_o')^2 = (f-f_o)^2 - 2(f_o'-f_o)(f-f_o) + (f_o-f_o')^2$$

d'où :

$$(270)\quad P'_{BR} = \frac{P_i Q_o^2}{4\pi^2 f_o^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f)\, df + P_{Bi}\left[\left(\frac{\eta Q_o}{2}\chi'\right)^2 + \left(\frac{\eta Q_o}{2}\chi''\right)^2\right]$$

Au premier terme déjà présent en absence de R.P.E., est venu s'ajouter le second terme dû à la réflexion des bandes latérales de bruit sur la composante $\Delta\Gamma_{RPE}$ du cœfficient de réflexion créée par la résonance magnétique.

Les expressions (233) déduites des équations de Bloch permettent d'écrire :

$$(271)\quad P'_{BR} = \frac{P_i Q_o^2}{4\pi^2 f_o^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f)\, df + P_{Bi}\left(\frac{\eta Q_o}{2}\right)^2 \frac{\left(\frac{\chi_o}{2} H_o \gamma T_2\right)^2}{1+\gamma^2 T_2^2 (H-H_o)^2}$$

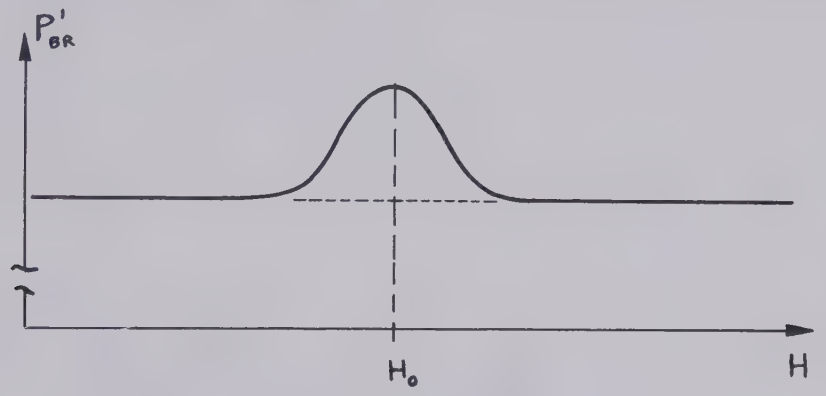


Fig. 45 - Puissance de bruit réfléchie en présence de R.P.E.

Le terme fonction de H est généralement négligeable devant l'autre (bruit réfléchi par la composante de Γ due à la R.P.E. << bruit réfléchi par la cavité). Il est toutefois possible dans certains cas de détecter la R.P.E. par une mesure de la puissance de bruit réfléchie sans aucune excitation. C'est la méthode proposée et vérifiée expérimentalement par **Gozzini.**

XI,1.3.3. P_R compte-tenu de $\Delta f_o(t)$

On utilise à nouveau la valeur moyenne de $|\Gamma(f,t)|^2$:

$$P_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{|\Gamma(f,t)|^2}\, S_{V_i}(f)\, df$$

$$P_R = \frac{Q_o^2}{f_o^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_o)^2\, S_{V_i}(f)\, df + \frac{Q_o^2}{f_o^2}\, \overline{\Delta f_o^2(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{V_i}(f)\, df$$

Le second terme est la somme de deux facteurs, un dû à la réflexion de la puissance porteuse $P_i e^{-\overline{\Phi^2}}$ et un autre dû à la réflexion des bandes latérales incidentes du signal d'excitation. La formule s'écrit donc :

(272)
$$P_R = \frac{P_i Q_o^2}{4\pi^2 f_o^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f)\, df + \frac{Q_o^2}{f_o^2} \overline{\Delta f_o^2(t)}\, P_i e^{-\overline{\Phi^2}} + \frac{Q_o^2}{f_o^2} \overline{\Delta f_o^2(t)}\, P_i (1 - e^{-\overline{\Phi^2}})$$

avec : $$\overline{\Delta f_o^2(t)} = \frac{\sqrt{\pi}\, A'\, \Gamma_e(\varepsilon')}{\Gamma_e(\varepsilon' + \frac{1}{2})}$$

Les deux premiers termes sont prépondérants, le dernier étant un terme du second ordre (réflexion du bruit incident par le bruit de cavité).

XI,1.4. Signal d'excitation à diffusion de phase

Considérons le cas où le spectre de radio-fréquences du signal incident est lorentzien :

(57)
$$S_{\nu_i}(f) = P_i \frac{2\beta}{\beta^2 + 4\pi^2 (f - f_o)^2}$$

($\beta/2\pi$ est la demi-largeur du spectre de radio-fréquences).

XI,1.4.1. P_R sans R.P.E. (cavité adaptée à fo)

$$P_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{Q_o^2}{f_o^2}(f - f_o)^2} \right] \frac{2\beta P_i}{\beta^2 + 4\pi^2 (f - f_o)^2}\, df$$

$$P_R = P_i - \frac{2 P_i}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[1 + \frac{Q_o^2}{f_o^2}(f - f_o)^2\right]\left[1 + \frac{4\pi^2}{\beta^2}(f - f_o)^2\right]}\, df$$

(273) soit
$$P_R = \frac{\frac{\beta Q_o}{\omega_o}}{1 + \frac{\beta Q_o}{\omega_o}} P_i$$

$\beta Q_o / \omega_o$ est le rapport : largeur de raie du spectre incident/ largeur de la courbe de résonance de la cavité de mesure.

Pour un oscillateur de haute qualité $\beta Q_o/\omega_o \ll 1$ et $P_R \simeq \frac{\beta Q_o}{\omega_o} P_i$

En utilisant la relation (55) relative au bruit thermique interne

$$S_{\phi_i}(f) = \frac{\omega_o^2 k T}{2 P Q^2} = 2\beta \qquad (f \gtrless 0)$$

on peut écrire :

(274)
$$P_R \simeq \frac{Q_0}{2\omega_0} S_{\dot{\Phi}_i}(f) \cdot P_i$$

La puissance réfléchie en absence de R.P.E. est proportionnelle à la valeur (constante) de la densité spectrale de puissance des fluctuations de fréquence de l'oscillateur d'excitation.

XI,1.4.2. P'_R avec R.P.E.

Le cœfficient de réflexion (255) a pour expression approchée :

$$|\Gamma'(f)|^2 \simeq 1 - \frac{1 - \left(\frac{\eta Q_0}{2}\chi''\right)^2}{1 + \frac{Q_0^2}{f_0^2}(f - f'_0)^2}$$

$$P'_R = P_i - \left[1 - \left(\frac{\eta Q_0}{2}\chi''\right)^2\right] \frac{2P_i}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[1 + \frac{Q_0^2}{f_0^2}(f - f'_0)^2\right]\left[1 + \frac{4\pi^2}{\beta^2}(f - f_0)^2\right]} df$$

Dans le cas simple où $f'_0 = f_0$, c'est-à-dire $\chi' = 0$:

$$P'_R = P_i - \left[1 - \left(\frac{\eta Q_0}{2}\chi''\right)^2\right] \frac{P_i}{1 + \frac{\beta Q_0}{\omega_0}}$$

(275)
$$P'_R = \frac{\frac{\beta Q_0}{\omega_0}}{1 + \frac{\beta Q_0}{\omega_0}} P_i + \frac{1}{1 + \frac{\beta Q_0}{\omega_0}} \left(\frac{\eta Q_0}{2}\chi''\right)^2 P_i$$

Le premier terme correspond au bruit réfléchi déjà calculé en absence de R.P.E.. Le second terme correspond au signal d'absorption affecté du facteur :

$$\frac{1}{1 + \frac{\beta Q_0}{\omega_0}} \leq 1$$

REMARQUE : En utilisant l'expression complète (75) du spectre R.F. incident, il est également possible de calculer (dans le cas $f'_0 = f_0$) :

$$P_R = P_i \left\{ 1 - e^{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma^n \frac{1}{1 + \frac{Q_0 B_n}{\omega_0}} \right\}$$ sans R.P.E.

$$P'_R = P_R + \left\{ e^{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma^n \frac{1}{1 + \frac{Q_0 B_n}{\omega_0}} \right\} \left(\frac{\eta Q_0}{2}\chi''\right)^2 P_i$$ avec R.P.E.

Toutefois, la complexité de ces expressions fait qu'elles ne sont pas commode à utiliser. Les conclusions qualitatives sont néanmoins les mêmes que celles obtenues à l'aide des expressions plus simples (273) et (275).

XI,1.5. Conclusions

Pour les différents types de spectre R.F. étudiés, le calcul de la puissance hyperfréquence réfléchie par la cavité dans les différents cas (sans R.P.E., avec R.P.E., avec $\Delta f_o(t)$) permet de dégager quelques conclusions :

- La puissance hyperfréquence du signal de R.P.E. est diminuée lorsque l'oscillateur est affecté d'un bruit de fréquence ;
- Le bruit de fréquence du signal d'excitation donne naissance à une puissance de bruit réfléchie (voir le tableau VII) ;
- Les fluctuations macroscopiques de la fréquence de résonance de la cavité donnent également naissance à une puissance de bruit réfléchie, qui dépend de la valeur efficace de ces fluctuations ;
- Il est nécessaire de connaitre le spectre R.F. du signal d'excitation pour calculer la puissance de bruit réfléchie ;
- Les expressions de la puissance de bruit réfléchie dépendent du spectre $S_{\dot{\phi}}(f)$ de l'oscillateur d'excitation.

TABLEAU VII - PUISSANCE HYPERFRÉQUENCE RÉFLÉCHIE PAR LA CAVITÉ DE MESURE

	OSCILLATEUR IDÉAL : f_o	OSCILLATEUR PERTURBÉ $f_o + \dot{\varphi}(t)$
Cavité sans RPE adaptée à f_o $\alpha = 1$	$P_{SR} = 0$ $P_{BR} = 0$	$P_{SR} = 0$ $(P_{BR})_{cavité} \neq 0$
Cavité avec RPE f'_o $\alpha' \neq 1$	P_{SR} $P'_{BR} = 0$	μP_{SR} $(\mu < 1)$ $P'_{BR} = (P_{BR})_{cavité} + (P_{BR})_{RPE}$

P_{SR} : puissance signal réfléchie P_{BR} : puissance de bruit réfléchie

XI,2. Analyse basse-fréquence

L'analyse qui précède ne permet pas l'étude détaillée des effets du bruit de fréquence sur la sensibilité en dispersion et en absorption. Pour effectuer cette étude, il faut calculer les différents termes basses-fréquences présents à la sortie du détecteur synchrone. L'observation de χ' ou χ'' montrera une contribution différente des effets du bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation. Un spectromètre à deux cavités permet de s'affranchir des effets de ce bruit.

XI,2.1. Signaux incidents sur le détecteur synchrone

La détermination du signal B.F. de sortie du détecteur synchrone nécessite la connaissance des expressions temporelles des signaux hyperfréquences incidents parvenant à ses entrées.

On considérera successivement le spectromètre à une cavité de la figure 41, et un spectromètre « symétrique » à deux cavités.

XI,2.1.1. Spectromètre à une cavité (fig. 41)

En notant $A_0 \cos [\omega_0 t + \phi(t)]$ l'onde hyperfréquence à l'entrée du coupleur directif, l'onde parvenant au détecteur synchrone par la voie «Référence» s'écrit :

(276) $$v_{réf.}(t) = A_{réf.} \cos\left[\omega_0 (t - \tau_1) + \phi(t - \tau_1)\right]$$

L'atténuateur A_1 permet de régler l'amplitude $A_{réf.}$; le déphaseur permet de régler le temps de propagation τ_1 le long de cette voie. L'onde parvenant au détecteur synchrone par la voie «Signal» est plus complexe car, outre les effets du temps de propagation τ_2 le long de cette voie, elle résulte de la réflexion de l'onde incidente sur la cavité de mesure avec :

$$\Gamma'(f) \simeq i \frac{Q_0}{f_0}(f - f_0) + \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' + i \frac{\eta Q_0}{2} \chi'$$

Pour la fréquence instantanée $f(t) = f_0 + \dot{\varphi}(t)$:

$$\Gamma'(f(t)) \simeq i \frac{Q_0}{f_0} \dot{\varphi}(t) + \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' + i \frac{\eta Q_0}{2} \chi'$$

L'onde parvenant au détecteur synchrone par la voie «Signal» est alors :

(277)
$$\begin{aligned} v_s(t) = {} & \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' A_0 \cdot \cos\left[\omega_0 (t - \tau_2) + \phi(t - \tau_2)\right] \\ & + \frac{\eta Q_0}{2} \chi' A_0 \cdot \cos\left[\omega_0 (t - \tau_2) + \phi(t - \tau_2) + \frac{\pi}{2}\right] \\ & + \frac{Q_0 A_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t - \tau_2) \cdot \cos\left[\omega_0 (t - \tau_2) + \phi(t - \tau_2) + \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Aux deux termes quasi-sinusoïdaux proportionnels respectivement à χ'' et χ', vient s'ajouter un terme de bruit directement proportionnel aux fluctuations de fréquence de l'oscillateur d'excitation, et qui contribuera à limiter la sensibilité du spectromètre.

XI,2.1.2. Spectromètre à deux cavités

En modifiant la structure du spectromètre, il est possible de supprimer le terme de bruit proportionnel à $\dot{\phi}$ dans l'expression (277). Considérons pour cela le spectromètre schématisé sur la figure 46. La cavité de référence est identique à la cavité de mesure.

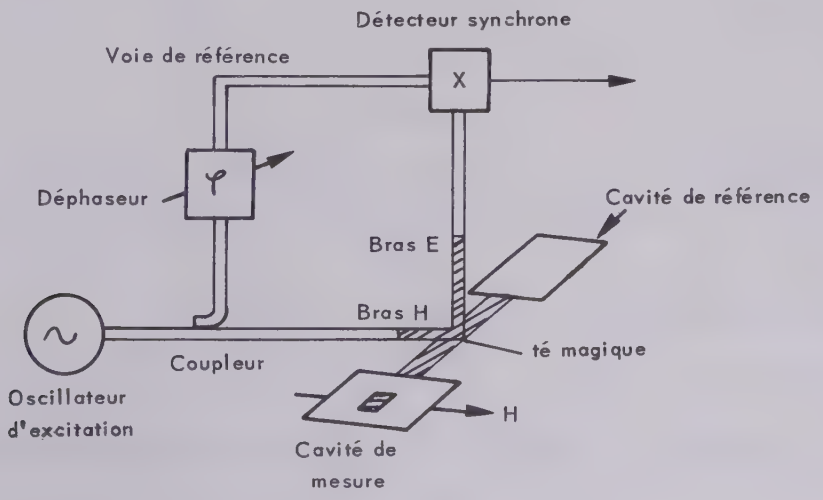


Fig. 46 - Spectromètre à deux cavités

• 1er cas : sans R.P.E.

Supposons dans un premier temps que l'échantillon n'est pas introduit, et que les deux cavités sont adaptées à la résonance ; pour la fréquence instantanée $f_o + \dot{\varphi}(t)$, les cœfficients de réflexion s'écrivent :

$$\Gamma_{mes.}(f(t)) = \Gamma_{réf.}(f(t)) \simeq i \frac{Q_o}{f_o} \dot{\varphi}(t)$$

Les ondes incidentes sur les deux cavités sont en phase ; les ondes réfléchies sont égales et proportionnelles à :

$$i \frac{Q_o A_o}{f_o} \dot{\varphi}(t) \cos [\omega_o t + \phi(t)]$$

Le signal de sortie du té magique (bras E) est proportionnel à la différence des deux ondes réfléchies et est donc nul.

• 2è cas : avec R.P.E.

Lorsque la R.P.E. se produit dans la cavité de mesure, on a pour la fréquence instantanée $f_o + \dot{\varphi}(t)$:

$$\begin{cases} \Gamma_{mes}(f(t)) = \frac{\eta Q_o}{2} \chi'' + i \frac{\eta Q_o}{2} \chi' + i \frac{Q_o}{f_o} \dot{\varphi}(t) \\ \Gamma_{réf.}(f(t)) = i \frac{Q_o}{f_o} \dot{\varphi}(t) \end{cases}$$

En notant $A_o \cos [\omega_o t + \phi(t)]$ le signal incident sur les cavités, le signal réfléchi par la cavité de mesure est proportionnel à :

$$v_{R_1}(t) = \frac{\eta Q_o}{2} \chi'' A_o \cos [\omega_o t + \phi(t)]$$

$$+ \frac{\eta Q_o}{2} \chi' A_o \cos [\omega_o t + \phi(t) + \frac{\pi}{2}]$$

$$+ \frac{Q_o A_o}{\omega_o} \dot{\phi}(t) \cos [\omega_o t + \phi(t) + \frac{\pi}{2}]$$

Le signal réfléchi par la cavité de référence est proportionnel à :

$$v_{R_2}(t) = \frac{Q_o A_o}{\omega_o} \dot{\phi}(t) \cos [\omega_o t + \phi(t) + \frac{\pi}{2}]$$

Le signal à la sortie du té magique est alors proportionnel à la différence $v_{R_1}(t) - v_{R_2}(t)$, soit à :

(278)
$$v_s(t) = \frac{\eta Q_o}{2} \chi'' A_o \cos[\omega_o t + \phi(t)] + \frac{\eta Q_o}{2} \chi' A_o \cos[\omega_o t + \phi(t) + \frac{\pi}{2}]$$

Le terme de bruit proportionnel à $\dot{\phi}(t)$ est ainsi supprimé du fait des relations de phase existant dans le té magique [54].

XI,2.2. Signal de sortie du détecteur synchrone

XI,2.2.1. Spectromètre à une cavité

Le signal de sortie du détecteur synchrone (assimilé ici à un multiplicateur idéal) est $K\, v_{réf}(t).v_s(t)$, où K est une constante caractérisant le détecteur.

En posant $\beta_o = K A_{réf.}/2$, la partie basse-fréquence de ce signal s'écrit :

$$v_{BF}(t) = \beta_o \left\{ \frac{\eta Q_o}{2} \chi'' A_o \cdot \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) + \omega_o(\tau_2-\tau_1)\right] \right.$$

$$+ \frac{\eta Q_o}{2} \chi' A_o \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) + \omega_o(\tau_2-\tau_1)\right] \quad (279)$$

$$\left. + \frac{Q_o A_o}{\omega_o} \dot{\phi}(t-\tau_2) \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) + \omega_o(\tau_2-\tau_1)\right] \right\}$$

Le réglage de la durée de propagation τ_1 à l'aide du déphaseur permet d'observer soit χ' , soit χ'' :

OBSERVATION DE LA DISPERSION

Lorsque la condition

$$\omega_o(\tau_2 - \tau_1) = \frac{\pi}{2}$$

est réalisée (signal et référence en quatradure), le signal $v_{BF}(t)$ s'écrit :

$$v_{\chi'}(t) = \beta_o \left\{ \frac{\eta Q_o}{2} \chi' A_o \cdot \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right] \right.$$

$$+ \frac{Q_o A_o}{\omega_o} \dot{\phi}(t-\tau_2) \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right] \quad (280)$$

$$\left. - \frac{\eta Q_o}{2} \chi'' A_o \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right] \right\}$$

La différence $\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)$ est une fonction aléatoire de t , de moyenne nulle, stationnaire même si $\phi(t)$ est un processus de diffusion [20] :

$$\left.\begin{aligned} &\cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right] \lesssim 1 \\ &\sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right] \ll 1 \end{aligned}\right\} \text{ avec une probabilité voisine de 1}$$

Le premier terme de l'équation (280) est le signal de dispersion. Le second terme, directement proportionnel aux fluctuations de fréquence de l'oscillateur d'excitation, résulte de ce que le spectromètre réglé pour observer la dispersion est en fait un discriminateur hyperfréquence [48, 58].

Le troisième terme (réflexion du bruit incident par $\Delta\Gamma_{RPE}$) est généralement négligeable vis-à-vis des deux autres.

Une expression approchée de $v_{\chi'}(t)$ s'écrit :

$$v_{\chi'}(t) \simeq \beta_o \left\{ \frac{\eta Q_o}{2} \chi' A_o + \frac{Q_o A_o}{\omega_o} \dot{\phi}(t-\tau_2) \right\} \quad (281)$$

OBSERVATION DE L'ABSORPTION

Lorsque la condition :

$$\omega_0 (\tau_2 - \tau_1) = 2\pi n \qquad (n : \text{entier})$$

est réalisée, (signal et référence en phase), le signal $v_{BF}(t)$ s'écrit :

(282)
$$v_{\chi''}(t) = \beta_0 \left\{ \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' A_0 \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right] + \frac{Q_0 A_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t-\tau_2) \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right] + \frac{\eta Q_0}{2} \chi' A_0 \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right] \right\}$$

L'importance du terme de bruit proportionnel à $\dot{\phi}$ est ici réduite à cause des valeurs faibles devant l'unité du sinus. Une expression approchée de $v_{\chi''}(t)$ s'écrit :

(283)
$$v_{\chi''}(t) \simeq \beta_0 \left\{ \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' A_0 + \frac{Q_0 A_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t-\tau_2) \left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right] \right\}$$

Si l'on réalise la condition $\tau_1 = \tau_2$, cette expression montre que l'on s'affranchit totalement des effets du bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation :

(284)
$$v_{\chi''}(t) = \beta_0 \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' A_0$$

Toutefois, les durées de propagation τ_1 et τ_2 sont elles aussi affectées de fluctuations d'origine macroscopique (que nous appellerons «bruit flicker de pont») qui contribuent au bruit du système en empêchant la compensation totale des effets du bruit de fréquence lors de l'observation de l'absorption.

XI,2.2.2. Spectromètre à deux cavités

L'analyse du spectromètre à deux cavités représenté sur la figure 45 a permis d'établir que l'expression du signal hyperfréquence à la sortie du té magique est proportionnelle à :

$$v_s(t) = \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' A_0 \cos\left[\omega_0 t + \phi(t)\right] + \frac{\eta Q_0}{2} \chi' A_0 \cos\left[\omega_0 t + \phi(t) + \frac{\pi}{2}\right]$$

La partie B.F. du signal de sortie du détecteur synchrone s'écrit :

(285)
$$v_{BF}(t) = \beta_0 \left\{ \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' A_0 \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) + \omega_0(\tau_2 - \tau_1)\right] + \frac{\eta Q_0}{2} \chi' A_0 \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) + \omega_0(\tau_2 - \tau_1)\right] \right\}$$

De même que pour le spectromètre à une cavité, le réglage de τ_1 à l'aide du déphaseur permet d'observer χ' ou χ'' :

$$v_{x'}(t) = \beta_0 \left\{ \frac{\eta Q_0}{2} \chi' A_0 \cdot \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right] - \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' A_0 \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right] \right\}$$

(286)
$$\boxed{v_{x'}(t) \simeq \beta_0 \frac{\eta Q_0}{2} \chi' A_0 \cdot \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right]}$$

$$v_{x''}(t) = \beta_0 \left\{ \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' A_0 \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right] + \frac{\eta Q_0}{2} \chi' A_0 \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right] \right\}$$

(287)
$$\boxed{v_{x''}(t) \simeq \beta_0 \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' A_0 \cdot \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right]}$$

Ces expressions simples permettront le calcul de la sensibilité du spectromètre à deux cavités (parag. XI.4).

XI,2.2.3. Spectre du signal de R.P.E.

Il est intéressant, pour la détermination de la sensibilité, de calculer la densité spectrale de puissance du premier terme des équations (280) et (282).

La différence $\Delta\phi(t) = \phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)$ étant une fonction aléatoire gaussienne, stationnaire, de moyenne nulle, la fonction d'autocorrélation de $\cos \Delta\phi(t)$ peut s'écrire :

$$R_{\cos\Delta\phi}(\tau) = \overline{\cos\Delta\phi(t) \cdot \cos\Delta\phi(t-\tau)}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \overline{\cos\left[\Delta\phi(t) - \Delta\phi(t-\tau)\right]} + \overline{\cos\left[\Delta\phi(t) + \Delta\phi(t-\tau)\right]} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2}\overline{\left[\Delta\phi(t) - \Delta\phi(t-\tau)\right]^2} \right) + \exp\left(-\frac{1}{2}\overline{\left[\Delta\phi(t) + \Delta\phi(t-\tau)\right]^2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \exp\left(-\left[R_{\Delta\phi}(0) - R_{\Delta\phi}(\tau) \right] \right) + \exp\left(-\left[R_{\Delta\phi}(0) + R_{\Delta\phi}(\tau) \right] \right) \right\}$$

$$= e^{-R_{\Delta\phi}(0)} \cdot \operatorname{ch} R_{\Delta\phi}(\tau)$$

$$= e^{-R_{\Delta\phi}(0)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{\Delta\phi}^{2n}(\tau)}{(2n)!}$$

La densité spectrale de $\cos \Delta\phi(t)$ en est la transformée de Fourier :

$$S_{\cos\Delta\phi}(f) = e^{-R_{\Delta\phi}(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\Delta\phi}^{2n}(\tau)\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau$$

(288)
$$S_{\cos\Delta\phi}(f) = e^{-R_{\Delta\phi}(0)} \left\{ \delta(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left[S_{\Delta\phi}(f)^{2n-1} \otimes S_{\Delta\phi}(f) \right] \right\}$$

Ce spectre a pour caractéristique importante de contenir une composante discrète $e^{-R_{\Delta\phi}(0)}\,\delta(f)$, même pour un signal d'excitation à diffusion de phase pour lequel le spectre R.F. est continu à la fréquence porteuse.

La puissance contenue dans la composante discrète du premier terme des équations (280) et (282) est respectivement :

(289)
$$P_{x'} = \beta_o^2 \left(\frac{\eta Q_o}{2} \chi' \right)^2 A_o^2\, e^{-R_{\Delta\phi}(0)}$$

(290)
$$P_{x''} = \beta_o^2 \left(\frac{\eta Q_o}{2} \chi'' \right)^2 A_o^2\, e^{-R_{\Delta\phi}(0)}$$

On note une faible réduction par rapport au cas de l'oscillateur idéal : $e^{-R_{\Delta\phi}(0)} \leq 1$.

XI,2.3. Influence de $\Delta f_o(t)$

Les effets des fluctuations lentes de la fréquence de résonance de la cavité de mesure n'ont pas été introduits dans l'analyse basse-fréquence qui précède.

Le modèle utilisé au paragraphe X,5 donne pour coefficient de réflexion total, en présence de R.P.E. :

$$\Gamma'(f,t) = i \frac{Q_o}{f_o}(f - f_o) - i \frac{Q_o}{f_o} \Delta f_o(t) + \frac{\eta Q_o}{2} \chi'' + i \frac{\eta Q_o}{2} \chi'$$

Si le signal incident est $A_o \cos[\omega_o t + \phi(t)]$, de fréquence instantanée $f(t) = f_o + \dot{\varphi}(t)$:

(291)
$$\Gamma'(f(t),t) = i \frac{Q_o}{f_o} \dot{\varphi}(t) - i \frac{Q_o}{f_o} \Delta f_o(t) + \frac{\eta Q_o}{2} \chi'' + i \frac{\eta Q_o}{2} \chi'$$

Les ondes parvenant au détecteur synchrone sont donc :

$$v_{réf}(t) = A_{réf} \cdot \cos[\omega_o(t-\tau_1) + \phi(t-\tau_1)]$$

$$v_s(t) = \frac{\eta Q_o}{2} \chi'' A_o \cos[\omega_o(t-\tau_2) + \phi(t-\tau_2)]$$

$$+ \frac{\eta Q_o}{2} \chi' A_o \cos\left[\omega_o(t-\tau_2) + \phi(t-\tau_2) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$+ \frac{Q_o A_o}{\omega_o} \dot{\phi}(t-\tau_2) \cos\left[\omega_o(t-\tau_2) + \phi(t-\tau_2) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$+ \frac{Q_o A_o}{f_o} \Delta f_o(t-\tau_2) \cos\left[\omega_o(t-\tau_2) + \phi(t-\tau_2) - \frac{\pi}{2}\right]$$

Le signal basse-fréquence à la sortie du détecteur synchrone a pour expression :

$$v_{BF}(t) = \beta_0 \left\{ \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' A_0 \cdot \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) + \omega_0(\tau_2-\tau_1) \right] \right.$$

$$+ \frac{\eta Q_0}{2} \chi' A_0 \cdot \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) + \omega_0(\tau_2-\tau_1) \right]$$

$$+ \frac{Q_0 A_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t-\tau_2) \cdot \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) + \omega_0(\tau_2-\tau_1) \right]$$

$$\left. - \frac{Q_0 A_0}{f_0} \Delta f_0(t-\tau_2) \cdot \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) + \omega_0(\tau_2-\tau_1) \right] \right\}$$

Selon le réglage du déphaseur de la voie «Référence», on obtient :

$$v_{\chi'}(t) = \beta_0 \left\{ \frac{\eta Q_0}{2} \chi' A_0 \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right] \right.$$

$$+ \frac{Q_0 A_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t-\tau_2) \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right]$$

$$- \frac{Q_0 A_0}{f_0} \Delta f_0(t-\tau_2) \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right] \qquad (292)$$

$$\left. - \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' A_0 \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right] \right\}$$

ou :

$$v_{\chi''}(t) = \beta_0 \left\{ \frac{\eta Q_0}{2} \chi'' A_0 \cos\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right] \right.$$

$$+ \frac{Q_0 A_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t-\tau_2) \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right]$$

$$- \frac{Q_0 A_0}{f_0} \Delta f_0(t-\tau_2) \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right] \qquad (293)$$

$$\left. + \frac{\eta Q_0}{2} \chi' A_0 \sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2) \right] \right\}$$

Ainsi, dans le cas où l'oscillateur d'excitation est affecté de fluctuations de fréquence, les variations lentes de la fréquence centrale du résonateur interviennent sur l'observation de la dispersion (ce qui était le cas avec un oscillateur idéal) *et* de l'absorption; ce qui résulte de la valeur non nulle de $\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)$: en effet, même si l'on réalise l'égalité entre les valeurs moyennes $\overline{\tau_1} = \overline{\tau_2}$, les fluctuations de temps de propagation empêchent la compensation de se faire exactement.

Les bruits $\dot{\phi}(t)$ et $\Delta f_0(t)$ produisent les mêmes effets, importants sur l'observation de χ' , faibles sur celle de χ'' , mais n'interviennent sur l'observation de χ'' que parce que la différence $\tau_1 - \tau_2$ possède des fluctuations aléatoires d'origine macroscopique («bruit flicker de pont»).

XI,3. Sensibilité du spectromètre à une cavité

Les résultats précédents permettent le calcul de la sensibilité du spectromètre en dispersion et en absorption.

XI,3.1. Sensibilité en dispersion : influence de l'oscillateur seul

Elle s'obtient en égalant la puissance du signal de R.P.E., soit $P_{\chi'}$, et la puissance de bruit dans la bande passante $\Delta\nu$ du récepteur. En tenant compte du terme de bruit $\beta_0 Q_0 A_0 \dot{\Phi}(t) / \omega_0$ et du bruit thermique prenant naissance dans la cavité de mesure, il vient :

$$\beta_0^2 \left(\frac{\eta Q_0}{2} \chi'_{min} \right)^2 2 P_i Z e^{-R_{\Delta\Phi}(0)} = 2\beta_0^2 F_R k T Z \Delta\nu + \beta_0^2 \frac{Q_0^2}{\omega_0^2} 2 P_i Z \int_0^{\Delta\nu} S_{\dot{\Phi}}(f)\, df$$

$$\frac{\eta}{2} \chi'_{min} = e^{\frac{1}{2} R_{\Delta\Phi}(0)} \sqrt{\frac{F_R k T \Delta\nu}{Q_0^2 P_i} + \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^{\Delta\nu} S_{\dot{\Phi}}(f)\, df}$$

En posant :

(294) $$I^2_{\Delta\nu}(0) = \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^{\Delta\nu} S_{\dot{\Phi}}(f)\, df$$

(295) $$\boxed{\frac{\eta}{2} \chi'_{min} = e^{\frac{1}{2} R_{\Delta\Phi}(0)} \sqrt{\frac{F_R k T \Delta\nu}{Q_0^2 P_i} + I^2_{\Delta\nu}(0)}}$$

La comparaison avec l'expression (241) montre la dégradation de la sensibilité due au bruit de fréquence qui est principalement due au terme $I^2_{\Delta\nu}(0)$.

Il est intéressant de calculer ce terme pour les différents types de bruit déjà étudiés (chapitres V et VI).

XI,3.1.1. Cas du bruit thermique interne

Dans le cas classique :

(55) $$S_{\dot{\Phi}_i}(f) = \frac{\omega_0^2 k T}{P Q^2} \qquad (f > 0)$$

(296) $$\boxed{\frac{\eta}{2} \chi'_{min} = \sqrt{\frac{F_R k T \Delta\nu}{Q_0^2 P_i} + \frac{k T \Delta\nu}{Q^2 P}}}$$

Le point fondamental de cette expression est que la sensibilité s'améliore indéfiniment lorsque la puissance croît (P_i est une fraction de P).

Dans le cas où :

$$S_{\phi_i}(f) = \frac{\omega_o^2 kT}{PQ^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(2Q\frac{f}{f_o}\right)^2} \qquad (f>0)$$

$$I^2_{\Delta\nu}(0) = \frac{kTf_o}{2PQ^3} \operatorname{arctg} \frac{2Q}{f_o} \Delta\nu$$

$$\approx \frac{kT\Delta\nu}{PQ^2} \qquad \text{lorsque} \qquad \Delta\nu \ll \frac{f_o}{2Q}$$

XI,3.1.2. Cas du bruit thermique externe

Le modèle de bruit externe étudié au paragraphe V,2 conduit à la densité spectrale :

(297) $$S_{\phi_e}(f) = \frac{\overline{n_e^2(t)}}{P_o} \cdot \frac{4\pi^2 f^2}{\sigma_s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{f^2}{2\sigma_s^2}} \qquad (f>0)$$

L'expression $I^2_{\Delta\nu}(0)$ obtenue à partir de ce spectre est également inversement proportionnelle à la puissance émise par l'oscillateur. Ici encore, la sensibilité s'améliore indéfiniment lorsque la puissance d'excitation croît :

(298) $$\boxed{\frac{\eta}{2}\chi'_{min} = \sqrt{\frac{F_R kT\Delta\nu}{Q_o^2 P_i} + \frac{C}{P_o}}}$$

avec : $$C = \frac{4\pi^2\overline{n_e^2(t)}}{\omega_o^2\sigma_s\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta\nu} f^2 e^{-\frac{f^2}{2\sigma_s^2}} df$$

XI,3.1.3. Cas du bruit de scintillation de fréquence

L'utilisation du modèle de spectre étudié au chapitre VI donne :

(299) $$\left(I^2_{\Delta\nu}(0)\right)_{Flicker} = \frac{2\pi A q^{2\varepsilon}}{\omega_o^2} \int_0^{\Delta\nu} \frac{df}{\left(q^2 + 4\pi^2 f^2\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

Aucune considération théorique sur le bruit de scintillation de fréquence ne permet actuellement de justifier une décroissance du paramètre A lorsque la puissance croît.

Par contre, il est raisonnable de penser que A est sensiblement indépendant de la puissance d'excitation, puisque dû à des variations d'origine mécanique. En tous cas, si A devait varier avec la puissance, cela se traduirait par une augmentation au delà d'une certaine valeur de la puissance (échauffement du résonateur), mais

certainement pas par une décroissance lorsque P croît.

Nous admettrons donc que le coefficient A du spectre en A/f reste constant pour les valeurs considérées de la puissance.

En conséquence, lorsque la puissance d'excitation croît, la sensibilité tend vers une valeur limite liée au bruit de scintillation de fréquence de l'oscillateur d'excitation, et fournit ainsi une méthode indirecte pour son étude :

(300)
$$\lim_{P_i \text{ croît}} \frac{\eta}{2} \chi'_{min} = \left(I_{\Delta\nu}(0) \right)_{Flicker}$$

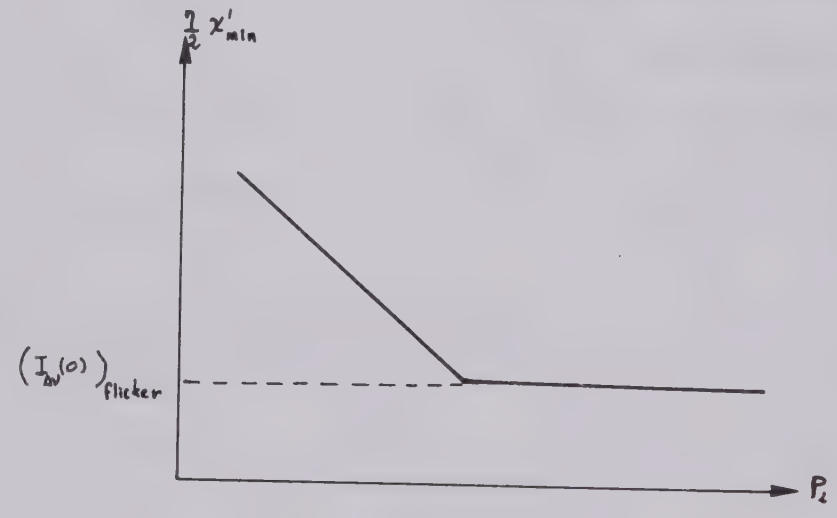


Fig. 47 - Sensibilité en fonction de P_i

XI,3.1.4. Conclusion sur l'étude de la sensibilité en dispersion

L'étude des effets des bruits thermiques interne et externe de l'oscillateur d'excitation montre que la limitation de sensibilité observée expérimentalement lorsque P_i croît (figure 47) ne peut leur être attribuée.

Par contre, l'analyse que nous avons faite des effets du bruit de scintillation de fréquence de l'oscillateur montre que celui-ci peut être une cause de la limitation de sensibilité. Nous verrons que les autres fluctuations d'origine macroscopique qui prennent naissance dans le spectromètre y contribuent aussi.

XI,3.2. Sensibilité en dispersion : influence du bruit de scintillation de la cavité

L'expression (295) de la sensibilité ne tient compte que du bruit thermique de la cavité de mesure et du bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation.

Les fluctuations lentes de la fréquence de résonance de la cavité de mesure (paragraphe X,5) sont à l'origine d'un terme supplémentaire qui contribue également à limiter la sensibilité en dispersion*, qui s'écrit alors :

(301)
$$\frac{\eta}{2}\chi'_{min} = \sqrt{\frac{F_R\, k\, T\, \Delta\nu}{Q_0^2\, P_i} + \frac{1}{f_0^2}\int_0^{\Delta\nu} S_\varphi(f)\, df + \frac{1}{f_0^2}\int_0^{\Delta\nu} S_{\Delta f_0}(f)\, df}$$

---

* *Cf. équation (246) dans le cas de l'oscillateur idéal.*

Le troisième terme représente les effets du bruit «flicker» de la cavité de mesure, et est indépendant de la puissance incidente tant que celle-ci reste inférieure à une valeur telle que les effets thermiques soient négligeables. Ce type de bruit contribue ainsi également à la limitation de sensibilité lorsque la puissance d'excitation croît (fig. 47).

XI,3.3. Sensibilité en absorption

Les différents bruits de fréquence (oscillateur et cavité) présents dans le spectromètre limitaient de façon notable la sensibilité en dispersion, car celle-ci est précisément mesurée par un décalage de *fréquence.*

En ce qui concerne l'observation de l'absorption, les effets de ces bruits sont atténués.

Dans l'expression (293) de $v_{\chi''}(t)$, le terme $\sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right]$ qui multiplie $\dot{\phi}(t-\tau_2)$ et $\Delta f_o(t-\tau_2)$ traduit cette atténuation.

Pour observer χ'', on réalise en effet l'égalité $\tau_1 = \tau_2$ (signal d'absorption et référence en phase) ; si τ_1 et τ_2 ne fluctuaient pas, le terme $\sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right]$ serait nul et les bruits de fréquence ne limiteraient pas la sensibilité en absorption.

Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué, les durées de propagation τ_1 et τ_2 sont affectées de très faibles fluctuations aléatoires de telle sorte que seule l'égalité entre les deux valeurs moyennes est réalisée : $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2$.

La sensibilité en absorption est ainsi limitée par les bruits de fréquence, mais de manière moindre qu'en dispersion puisque :

$$\sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right] \ll 1$$

à chaque instant avec une probabilité voisine de 1.

Le calcul de l'expression exacte de la sensibilité en absorption conduit toutefois à des expressions complexes car la détermination de la densité spectrale des deux termes de bruit

$$\dot{\phi}(t-\tau_2)\,.\,\sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right]$$

(302)

$$\text{et } \Delta f_o(t-\tau_2)\,.\,\sin\left[\phi(t-\tau_1) - \phi(t-\tau_2)\right]$$

est indispensable.

τ_1 et τ_2 sont des fonctions aléatoires du temps résultant des fluctuations macroscopiques dans les guides d'ondes et les couplages, créées par les vibrations mécaniques ou par des effets thermiques.

La détermination du spectre de ces fluctuations est donc a priori très difficile ; il dépend en outre de l'environnement de l'appareil ; il peut présenter certaines fréquences privilégiées, mais il est vraisemblable que sa partie très basse fréquence possède une caractéristique du type «flicker».

Pour préciser les difficultés du calcul de la sensibilité, on peut faire l'approximation

$$\sin\left[\phi(t-\tau_1)-\phi(t-\tau_2)\right] \simeq \phi(t-\tau_1)-\phi(t-\tau_2) \simeq (\tau_2-\tau_1)\,.\,\dot{\phi}(t-\tau_2)$$

Les deux termes de bruit (302) s'écrivent donc respectivement :

$$(\tau_2-\tau_1)\ \dot{\phi}^2(t-\tau_2)$$

$$\text{et}\quad (\tau_2-\tau_1)\ \dot{\phi}(t-\tau_2)\ \Delta f_o(t-\tau_2)$$

En supposant, ce qui est légitime, les fluctuations d'origines différentes non corrélées entre elles, le spectre de bruit total est le produit de convolution des spectres $S_{\tau_2-\tau_1}(f)$ et $S_{\dot{\phi}^2}(f)$ d'une part, $S_{\tau_2-\tau_1}(f)$, $S_{\dot{\phi}}(f)$ et $S_{\Delta f_o}(f)$ d'autre part, ce qui montre bien les difficultés rencontrées pour le calcul de la sensibilité.

On peut cependant prévoir que les différents bruits de scintillation (oscillateur, cavité, pont) se combineront pour donner, dans l'expression de la sensibilité, un terme indépendant de la puissance d'excitation qui représentera la limitation de sensibilité observée expérimentalement lorsque la puissance d'excitation croît.

A titre d'exemple, nous allons essayer d'évaluer le spectre de bruit dans le cas où l'on néglige les fluctuations de la fréquence de la cavité ($\Delta f_o(t) = 0$). Pour cette évaluation, nous choisirons un spectre $S_{\dot{\phi}}(f)$ lorentzien (ce qui est légitime si l'on s'en tient au bruit interne de l'oscillateur), et également un spectre lorentzien pour les fluctuations de $\tau_2 - \tau_1$: ce dernier choix (assez irréaliste puisque les fluctuations de

$\tau_2 - \tau_1$, qui ont pour origine les fluctuations macroscopiques du pont hyperfréquence, possèdent certainement un spectre du type «flicker») n'est fait que pour permettre un calcul explicite du produit de convolution des spectres $S_{\dot\phi^2}(f)$ et $S_{\tau_2-\tau_1}(f)$:

$$S_{\dot\phi^2}(f) = R^2_{\dot\phi}(0) \cdot \delta(f) + 2\, S_{\dot\phi}(f) \otimes S_{\dot\phi}(f)$$

(303)
$$S_{\dot\phi^2}(f) \otimes S_{\tau_2-\tau_1}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\tau_2-\tau_1}(y) \cdot S_{\dot\phi^2}(f-y)\, dy$$

$$= R_{\dot\phi^2}(0) \cdot S_{\tau_2-\tau_1}(f) + 2\, S_{\dot\phi}(f) \otimes S_{\dot\phi}(f) \otimes S_{\tau_2-\tau_1}(f)$$

Le produit de convolution de deux Lorentziennes étant une Lorentzienne, le spectre de bruit est donc la somme de deux Lorentziennes et ne possède donc pas une forme mathématique simple, aussi conserverons nous l'expression plus condensée $S_{\dot\phi^2}(f) \otimes S_{\tau_2-\tau_1}(f)$.

La sensibilité en absorption a alors pour expression générale :

(304)
$$\frac{\eta}{2}\chi''_{min} = e^{\frac{1}{2}R_{\Delta\phi}(0)} \sqrt{\frac{F_R\, k T \Delta\nu}{Q_o^2 P_i} + \frac{1}{\omega_o^2} \int_0^{\Delta\nu} S_{\dot\phi^2}(f) \otimes S_{\tau_2-\tau_1}(f)\, df}$$

En conclusion, s'il est possible de prévoir par le calcul que la sensibilité sera meilleure en absorption qu'en dispersion, il semble impossible de chiffrer précisément cette amélioration à cause de l'effet des différents bruits de scintillation sur lesquels on possède peu de renseignements quantitatifs, voire même qualitatifs, et qui dépendent en outre grandement de l'environnement de l'instrument.

L'expression générale (304) de la sensibilité en absorption montre néanmoins qu'il est injustifié de l'écrire sous la forme :

(305)
$$\frac{\eta}{2}\chi''_{min} = e^{\frac{1}{2}R_{\Delta\phi}(0)} \sqrt{\frac{F_R\, k T \Delta\nu}{Q_o^2 P_i} + \varepsilon_o\, I^2_{\Delta\nu}(0)}$$

où ε_o serait un coefficient positif inférieur à 1 traduisant l'atténuation des effets du bruit de fréquence [53].

XI,4. Sensibilité du spectromètre à deux cavités

Les résultats obtenus dans les paragraphes XI,2.2.2. et XI,2.2.3. permettent une estimation de la sensibilité du spectromètre symétrique à deux cavités représenté sur la figure 46.

L'expression du signal de sortie du té magique montre que le bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation aura la même influence sur la sensibilité en dispersion et en absorption : le terme de bruit proportionnel à $\dot\phi$ dont les effets étaient importants lors de l'observation de χ' et atténués lors de celle de χ'' , est supprimé totalement, dans la mesure où le «bruit flicker de pont» est négligé.

La sensibilité est alors la même en dispersion et en absorption :

(306)
$$\frac{\eta}{2}\chi'_{min} \text{ ou } \frac{\eta}{2}\chi''_{min} = e^{\frac{1}{2}R_{\Delta\phi}(0)} \sqrt{\frac{F_R\, k T \Delta\nu}{Q_o^2 P_i}} .$$

La dégradation de sensibilité due au bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation n'est plus représentée que par le terme $\exp \frac{1}{2} R_{\Delta\phi}(0)$ qui traduit la diminution de puissance du signal de R.P.E.

En pratique, la présence inévitable des fluctuations de pont d'origine macroscopique fait que le terme de bruit proportionnel à $\dot\phi(t)$ n'est qu'atténué (et non pas totalement supprimé). L'estimation de la dégradation

de sensibilité dueà ce terme atténué est alors au moins aussi délicate que celle de la sensibilité en absorption du spectromètre à une cavité, et cela pour les mêmes raisons (rôle du « bruit flicker de pont » sur lequel on a peu de données).

Ainsi, en négligeant le « bruit flicker de pont », le spectromètre à deux cavités permet d'observer χ' et χ'' avec la même sensibilité ultime.

Or, χ' et χ'' étant reliés l'un à l'autre par les relations de Kramers-Kronig, la sensibilité théorique de la mesure de l'un ou de l'autre doit être la même avec un instrument « idéal », c'est-à-dire un instrument ne défavorisant pas *par construction* la mesure de l'un par rapport à l'autre.

De ce point de vue, vis-à-vis du bruit de fréquence de l'oscillateur, le spectromètre à deux cavités apparait comme un instrument idéal, alors que le spectromètre à une cavité défavorise l'observation de χ'.

XI,5. *Variation de la sensibilité lorsque $\Delta\nu$ décroit*

L'expression (295) de la sensibilité implique une dépendance en fonction de la bande passante $\Delta\nu$. Le terme $I^2_{\Delta\nu}(0)$ peut dépendre a priori de façon diverse de $\Delta\nu$, d'où une étude de la sensibilité en fonction de $\Delta\nu$.

Les seuls bruits thermiques laissent prévoir une amélioration de sensibilité selon la loi $\sqrt{\Delta\nu}$ lorsque $\Delta\nu$ décroit (équations (234) et (296)). Or, on constate souvent expérimentalement que la diminution de $\Delta\nu$ en-dessous d'une valeur $\Delta\nu_0$ n'améliore plus notablement la sensibilité (fig. 48).

La nature du spectre des bruits de scintillation qui perturbent le fonctionnement du spectromètre permettent d'interpréter le changement de pente représenté sur la figure 48.

Le spectre de ces bruits, qui varie comme A/f aux très basses fréquences, devient prépondérant dans le terme

$$\int_0^{\Delta\nu} S_\phi(f)\, df$$

lorsque $\Delta\nu$ a une valeur suffisamment faible.

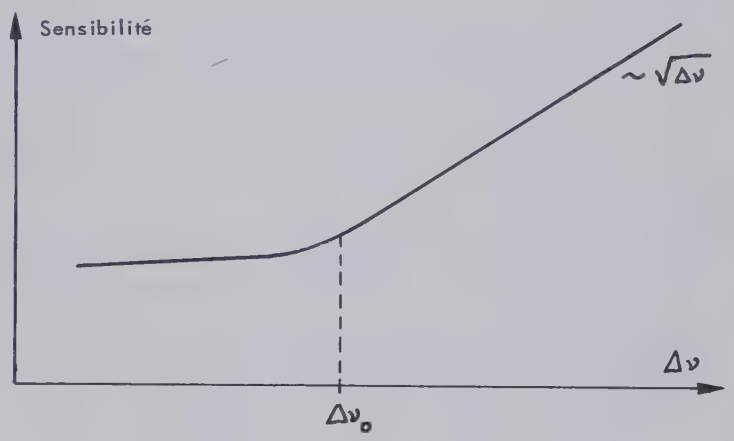


Fig. 48 - Sensibilité en fonction de $\Delta\nu$

Un modèle simple de spectre permet de préciser ce point (fig. 49) :

$$(307)\quad \begin{cases} S_\phi(f) = A/f_c & \text{pour} \quad 0 \leqslant f \leqslant f_c \\ S_\phi(f) = A/f & \text{pour} \quad f \geqslant f_c \end{cases}$$

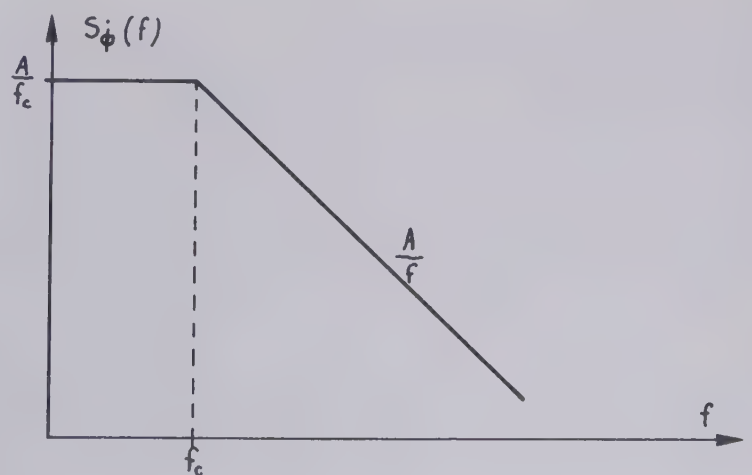


Fig. 49 - Modèle simple du spectre d'un bruit de scintillation

Divers résultats expérimentaux (cf. chapitre VI) montrent que lorsque l'on cherche à analyser le bruit «flicker» à l'aide d'un modèle de ce type, la fréquence de coupure f_c doit être choisie très inférieure à 10^{-6} Hz. Nous serons donc toujours dans le cas $\Delta\nu \gg f_c$.

La contribution d'un tel spectre sur la sensibilité totale est caractérisée par :

$$(308) \qquad \int_0^{\Delta\nu} S_\phi(f)\, df = A + A \int_{f_c}^{\Delta\nu} \frac{A}{f}\, df = A \operatorname{Log} \frac{e\,\Delta\nu}{f_c} \qquad e = 2{,}71\ldots$$

Lorsque $\Delta\nu$ décroit dans la zone où les bruits de scintillation deviennent prépondérants, la sensibilité ne s'améliore plus que selon la loi :

$$\left(A \operatorname{Log} \frac{e\,\Delta\nu}{f_c} \right)^{1/2}$$

Le même comportement qualitatif aurait été naturellement obtenu à l'aide du spectre (134) relatif au modèle du chapitre VI.

XI,6. Effet de la durée de mesure τ_0

Nous considérons maintenant les effets de la durée de mesure sur l'expression de la sensibilité du spectromètre.

XI,6.1. Signal minimum détectable [56] sur sur la sensibilité

Lors de la détection d'un signal continu noyé dans un bruit aléatoire stationnaire de moyenne nulle, la notion de signal minimum détectable n'a de sens que si le nombre d'observations est limité, ou si la durée totale d'observation est finie.

Au sens strict, le bruit stationnaire ne limite pas la détectabilité d'un tel signal si on dispose d'une durée d'observation infinie : tout changement de la valeur moyenne, aussi petit soit-il, peut être déterminé.

Le signal minimum détectable peut être défini de façon probabiliste : sa valeur décroit lorsque la durée d'observation croît et tend en principe ver zéro lorsque cette durée tend vers l'infini. Une composante continue sera supposée détectable si elle est supérieure à :

$$u_{min} = \left(\sum_i \sigma^2 \left[\langle n_i(t) \rangle_{\tau_0} \right] \right)^{1/2}$$

La parenthèse contient la somme des variances des différents bruits n_i moyennés pendant la durée totale d'observation τ_0.

XI,6.2. Application à la sensibilité du spectromètre (à une cavité)

En mode «dispersion», le signal B.F. à la sortie du filtre passe-bas ($\Delta\nu$) qui suit le détecteur synchrone s'écrit :

$$(309) \qquad v_{\chi'}(t) = \beta_0 \left[Q_0 A_0 \frac{\eta \chi'}{2} + Q_0 A_0 \frac{\dot{\phi}_{\Delta\nu}(t)}{\omega_0} + n_{eq_{\Delta\nu}}(t) \right]$$

(où l'indice $\Delta\nu$ rappelle que l'on considère les bruits filtrés ; R est la résistance génératrice du bruit thermique de la cavité).

Dans le cas d'un filtre lorentzien de largeur à mi-hauteur* égale à f_c :

$$(310) \qquad S_{n_{eq_{\Delta\nu}}}(f) = \frac{2kTR}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \qquad (f > 0)$$

---

* *largeur du filtre rectangle équivalent :* $\Delta\nu = \frac{\pi}{2} f_c = \frac{\omega_c}{4}$

Il vient alors :

$$(311)\quad \sigma^2\left[\langle n_{eq_{\Delta\nu}}(t)\rangle_{\tau_0}\right] = \int_0^\infty \frac{2kTR}{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sin\pi\tau_0 f}{\pi\tau_0 f}\right)^2 df$$

$$= \frac{kTR}{\tau_0}\left[1-\frac{1}{\omega_c\tau_0}+\frac{1}{\omega_c\tau_0}e^{-\omega_c\tau_0}\right]$$

et

$$(312)\quad I^2_{\Delta\nu}(\tau_0) = \frac{1}{\omega_0^2}\int_0^{\infty} S_\phi(f)\,\frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}\left(\frac{\sin\pi\tau_0 f}{\pi\tau_0 f}\right)^2 df$$

D'où la sensibilité :

$$(313)\quad \left(\frac{\eta}{2}\chi'_{min}\right)_{\tau_0} = \sqrt{\frac{F_R\,kT}{2Q_0^2P_i\tau_0}\left[1-\frac{1}{\omega_c\tau_0}+\frac{1}{\omega_c\tau_0}e^{-\omega_c\tau_0}\right]+I^2_{\Delta\nu}(\tau_0)}$$

Lorsque τ_0 est suffisamment petit pour que $\omega_c\tau_0 = 4\tau_0\Delta\nu \ll 1$, on retrouve l'expression (295) de la sensibilité (au terme $\exp\frac{1}{2}R_{\Delta\nu}(0)$ près que nous n'avons pas introduit ici pour ne pas surcharger l'écriture) :

$$\lim_{\tau_0\to 0}\left(\frac{\eta}{2}\chi'_{min}\right)_{\tau_0} = \sqrt{\frac{F_R\,kT}{2Q_0^2P_i\tau_0}\left[1-\frac{1}{\omega_c\tau_0}+\frac{1}{\omega_c\tau_0}\left(1-\omega_c\tau_0+\frac{\omega_c^2\tau_0^2}{2}\right)\right]+I^2_{\Delta\nu}(0)}$$

$$= \sqrt{\frac{F_R\,kT}{2Q_0^2P_i\tau_0}\cdot\frac{\omega_c\tau_0}{2}+I^2_{\Delta\nu}(0)}$$

$$= \sqrt{\frac{F_R\,kT\,\Delta\nu}{Q_0^2P_i}+I^2_{\Delta\nu}(0)}$$

L'expression (313) de la sensibilité montre que lorsque τ_0 croît, la limitation due au bruit thermique de la cavité décroit selon la loi (311) pour le filtre lorentzien considéré.

Par contre, ici encore, c'est le bruit de scintillation de fréquence de l'oscillateur d'excitation qui va créer une limitation de la sensibilité lorsque τ_0 croît.

En effet, le filtre passe-bas ($\Delta\nu$ de l'ordre du hertz) laisse la portion $S_\phi(f) \simeq A/f$ (qui est à l'origine du palier de $I(\tau)$) pratiquement inchangée ; en conséquence, pour les valeurs de τ_0 supérieures à une ou quelques secondes :

$$I_{\Delta\nu}(\tau_0) \simeq I(\tau_0) = \text{constante}$$

En absence de modulation, la sensibilité en dispersion lorsque τ_o croît est donc limitée par la valeur du palier « flicker » de l'oscillateur d'excitation ce qui est logique si l'on remarque que χ' est mesuré par une variation de fréquence et compte-tenu de la signification de $I(\tau_o)$ (chapitre VII) :

(314)
$$\lim_{\tau_o \text{ croît}} \left(\frac{\eta}{2}\chi'_{min}\right)_{\tau_o} \simeq I(\tau_o)$$

APPLICATION NUMÉRIQUE

$T = 300°\,K$; $Q_o = 5.10^3$; $P_i = 300$ mW ; $\Delta\nu = 1$ Hz

$$\frac{kT\Delta\nu}{Q_o^2 P_i} \simeq 5{,}5 \cdot 10^{-28}$$

Si le palier « flicker » de l'oscillateur d'excitation a pour valeur

$$I(\tau_o) \simeq I_{\Delta\nu}(\tau_o) = 10^{-11}$$

la sensibilité vaut sensiblement :

$$\left(\frac{\eta}{2}\chi'_{min}\right)_{\tau_o} = \sqrt{\left(< 5{,}5.10^{-28}\right) + 10^{-22}} \simeq 10^{-11}$$

Ce résultat montre ainsi comment la spectroscopie hertzienne peut être à l'origine d'une méthode d'étude indirecte du bruit de scintillation de fréquence des oscillateurs.

XI,7. Effets de la modulation du champ magnétique sur la sensibilité

XI,7.1. Sensibilité en dispersion

Le phénomène de résonance magnétique est très généralement observé en modulant le champ magnétique continu H_o ; le champ total s'écrit alors :

$$H(t) = H_o + h_o \sin 2\pi F t$$

La fréquence de modulation F est naturellement très petite vis-à-vis de la fréquence d'excitation f_o .

Le signal délivré par le spectromètre est alors une onde sinusoïdale de fréquence F , dont le spectre est localisé dans une zone spectrale où les divers bruits de scintillation (oscillateur, cavité de mesure, pont) jouent un rôle atténué [50, 51].

En ce qui concerne la sensibilité en dispersion du spectromètre à une cavité (équation 295), les effets du bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation sont maintenant représentés par le terme :

(315)
$$I^2_{F,\Delta\nu}(0) = \frac{1}{\omega_o^2}\int_{F-\frac{\Delta\nu}{2}}^{F+\frac{\Delta\nu}{2}} S_\phi(f)\,df \simeq \frac{S_\phi(F)\cdot\Delta\nu}{\omega_o^2}$$

L'intervalle d'intégration ($F - \Delta\nu/2$, $F + \Delta\nu/2$) ne comprenant pas la partie basse-fréquence où le spectre des bruits de scintillation est prépondérant, et le spectre complet $S_\phi(f)$ d'un oscillateur décroissant lorsque f croît au-delà d'une certaine valeur, l'inégalité suivante est vérifiée pour une fréquence de modulation F suffisamment élevée :

$$I_{F,\Delta\nu}(0) \ll I_{\Delta\nu}(0)$$

En présence de la modulation, le bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation limite donc d'une façon moindre la sensibilité en dispersion du spectromètre à une cavité :

(316)
$$\frac{\eta}{2}\chi'_{min} = \sqrt{\frac{F_R k T \Delta\nu}{Q_o^2 P_i} + \frac{S_\phi(F)\,\Delta\nu}{\omega_o^2}}$$

La connaissance du spectre $S_\phi(f)$ doit permettre l'optimisation de la valeur de la fréquence de modulation F compte tenu, d'une part de la décroissance de la puissance signal lorsque F croît*, d'autre part que les effets du bruit de fréquence décroissent également lorsque F croît au delà d'une certaine valeur.

En pratique, la valeur maximale F_{max} est égale à quelques centaines de kilohertz pour les spectromètres fonctionnant en bande X.

XI,7.2. Application aux principaux bruits de l'oscillateur

Il est intéressant de comparer les expressions de $I^2_{\Delta\nu}(0)$ et de $I^2_{F,\Delta\nu}(0)$ pour les trois principaux bruits de fréquence de l'oscillateur.

CAS DU BRUIT THERMIQUE INTERNE

En utilisant le spectre lorentzien donné par l'équation (69), il vient :

$$I^2_{\Delta\nu}(0) = \frac{k T f_o}{2 P Q^3} \operatorname{arctg} \frac{2Q}{f_o}\Delta\nu \simeq \frac{k T \Delta\nu}{P Q^2}$$

$$I^2_{F,\Delta\nu}(0) = \frac{k T f_o}{2 P Q^3} \operatorname{arctg} \frac{\frac{2Q}{f_o}\Delta\nu}{1+\frac{4Q^2}{f_o^2}\left(F-\frac{\Delta\nu}{2}\right)\left(F+\frac{\Delta\nu}{2}\right)} \qquad \Delta\nu \ll F \ll \frac{f_o}{2Q}$$

Cette expression donne la loi de décroissance de $I^2_{F,\Delta\nu}(0)$ lorsque la fréquence de modulation F croît.

CAS DU BRUIT THERMIQUE EXTERNE

L'expression (297) de $S_{\phi_e}(f)$ donne :

$$I^2_{\Delta\nu}(0) = \mu \int_0^{\Delta\nu} f^2 e^{-\frac{f^2}{2\sigma_s^2}}\, df \qquad \mu = \frac{4\pi^2}{\sigma_s\sqrt{2\pi}\,\omega_o^2}\cdot\frac{\overline{n_e^2(t)}}{P_o}$$

$$I^2_{F,\Delta\nu}(0) = \mu \int_{F-\frac{\Delta\nu}{2}}^{F+\frac{\Delta\nu}{2}} f^2 e^{-\frac{f^2}{2\sigma_s^2}}\, df$$

---

* *On sort alors de la bande passante de la cavité de mesure.*

L'allure de $S_{\varphi_s}(f)$ montre que $I^2_{F,\Delta\nu}(0)$ passe par un maximum pour la valeur de la fréquence de modulation $F = \sigma_s \sqrt{2}$, puis décroit lorsque F croît.

CAS DU BRUIT FLICKER

En utilisant le modèle de spectre représenté sur la figure 48, on obtient :

$$I^2_{\Delta\nu}(0) = \frac{A}{\omega_0^2} \log \frac{e\,\Delta\nu}{f_c} \qquad \frac{\Delta\nu}{f_c} \gg 1$$

et $$I^2_{F,\Delta\nu}(0) = \frac{A}{\omega_0^2} \log \frac{F+\frac{\Delta\nu}{2}}{F-\frac{\Delta\nu}{2}} \simeq \frac{A}{\omega_0^2} \log \left(1+\frac{\Delta\nu}{2F}\right)^2$$

qui donne la loi de décroissance de $I^2_{F,\Delta\nu}(0)$ lorsque la fréquence de modulation croît.

Ces diverses expressions de $I^2_{F,\Delta\nu}(0)$ montrent l'intérêt qu'il y a à choisir une fréquence de modulation suffisamment élevée, compatible toutefois avec la bande passante de la cavité de mesure.

XI,8. Conclusion

Cette étude était destinée à mettre en évidence les paramètres fondamentaux qui limitent la sensibilité d'un spectromètre pour R.P.E., et plus particulièrement les paramètres qui caractérisent le bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation.

Nous avons pu ainsi préciser certains résultats :

- Dans le cas du spectromètre à une cavité, les expressions de la sensibilité montrent la différence entre les effets de ce bruit selon que l'on observe la dispersion ou l'absorption.
- Le rôle du « bruit flicker de pont » (fluctuations aléatoires des temps de propagation) a été également mis en évidence, et particulièrement les difficultés qu'il entraine pour le calcul de la sensibilité en absorption.
- Le modèle aléatoire stationnaire de bruit de scintillation développé au chapitre VI a permis d'introduire dans cette analyse les fluctuations d'origine macroscopique de la fréquence de résonance de la cavité de mesure.
- En outre, un spectromètre à deux cavités a été étudié, dans lequel le bruit de fréquence de l'oscillateur d'excitation produit la même limitation sur l'observation de la dispersion que sur celle de l'absorption.
- Enfin, nous avons pu expliquer théoriquement les variations de sensibilité relevées expérimentalement en fonction des principaux paramètres (puissance d'excitation, bande passante de détection, durée d'intégration).
- Une des conclusions les plus importantes de cette étude est que la spectroscopie hertzienne en dispersion peut se révéler être une méthode d'étude indirecte du bruit de scintillation de fréquence des oscillateurs.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les résultats des études effectuées dans ce mémoire peuvent être envisagés selon deux points de vue différents : celui de la *caractérisation* des oscillateurs et celui de leur *utilisation.*

- Du point de vue de la caractérisation des oscillateurs, les résultats essentiels nous paraissent être ceux relatifs aux relations mathématiques générales entre l'instabilité de fréquence et la pureté spectrale, ainsi que ceux relatifs à l'étude des diverses sources de bruit.

  Nous avons pu établir une relation générale entre l'instabilité dans le domaine temps et le spectre de radio-fréquences, relation qui doit permettre à un utilisateur de préciser ses besoins, tout en évitant la recherche de propriétés contradictoires.

  Dans le domaine des sources de bruit, un premier résultat a été la mise en évidence de l'existence d'une *limite thermodynamique ultime* pour l'instabilité à très court terme, ainsi que ses conséquences sur le spectre de radio-fréquences.

  Un second résultat a été de montrer pourquoi le bruit thermodynamique interne, qui conditionne l'instabilité ultime, est toujours masqué par le bruit additif externe, sauf peut-être dans le cas de certains masers.

  Le troisième résultat est relatif à l'interprétation du palier des courbes $I(\tau)$ observé expérimentalement pour tous les types d'oscillateurs lorsque la durée d'intégration croît au delà de quelques secondes. Ce palier étant attribué aux bruits de scintillation de l'oscillateur, nous avons développé un modèle aléatoire *stationnaire* (le premier à notre connaissance) qui permet de décrire ce type de bruit en évitant les difficultés rencontrées lors de l'utilisation des approches classiques.

- En ce qui concerne les utilisations d'un oscillateur, nous avons analysé principalement deux problèmes, le premier étant rattaché au domaine de la *métrologie des fréquences*, le second au domaine de *l'instrumentation scientifique.*

  Sur le premier problème, nous nous sommes attachés à préciser les processus de l'estimation expérimentale de l'instabilité dans le domaine temps. Nous avons ainsi montré que la définition utilisée pour la variance de N mesures influait sur le résultat obtenu, et qu'en fonction de la nature du bruit étudié une définition adéquate devait être utilisée. Outre leur intérêt pour la caractérisation des oscillateurs, ces résultats sont utilisables pour la détermination de la nature des sources de bruit.

  En ce qui concerne le second problème, nous avons étudié l'influence des sources de bruit de l'oscillateur d'excitation sur la *sensibilité ultime d'un spectromètre hertzien.*

  L'analyse détaillée qui a été faite a permis de rendre compte de la plupart des résultats expérimentaux connus concernant l'influence de la puissance d'excitation, de la bande passante de détection et de la durée d'intégration, sur la sensibilité.

  Nous avons en particulier montré que la sensibilité à forte puissance n'était limitée que par les bruits de *scintillation* de l'oscillateur ou du dispositif de mesure. Ce résultat permet de proposer une méthode de mesure indirecte du bruit de scintillation de l'oscillateur à l'aide d'un spectromètre hertzien.

- S'ils ont permis de résoudre, au moins partiellement, certains problèmes, plusieurs résultats obtenus dans ce mémoire posent à leur tour de nouvelles questions.

  Nous pensons ainsi que le modèle développé pour représenter le bruit de scintillation n'est qu'un modèle *phénoménologique*, et qu'en tant que tel sa validité et sa généralité sont loin d'être démontrées. Des études importantes dans ce domaine sont à faire, tant du point de vue théorique qu'expérimental, la spectroscopie hertzienne pouvant être utilisée dans certains cas comme moyen de mesure.

  Quoiqu'il en soit, ce modèle a pour vertu principale d'être stationnaire, donc susceptible d'être traité à l'aide des théorèmes généraux relatifs aux processus aléatoires stationnaires.

  Des modifications apportées à ce modèle pourraient peut-être permettre une approche du très difficile problème que constitue l'étude des phénomènes instationnaires.

Manuscrit remis le 16 décembre 1971.

ANNEXES DE CALCUL

ANNEXE N° 1 *

CALCUL DE L'INTÉGRALE $I_{n-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 [S_\phi(f) \overset{n-1}{\otimes} S_\phi(f)] \, df$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 [S_\phi(f) \otimes S_\phi(f)] \, df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(y) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_\phi(f-y) \, df \right)}_{\sigma_\phi^2 S + y^2 S} dy$$

avec $\begin{cases} \sigma_\phi^2 = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_\phi(f) \, df}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f) \, df} \\ S = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f) \, df \end{cases}$

$$= \sigma_\phi^2 S \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(y) \, dy}_{S} + S \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 S_\phi(y) \, dy}_{S \sigma_\phi^2}$$

$$= 2 \sigma_\phi^2 S^2$$

De même, on calcule :

$$I_2 = 3 \sigma_\phi^2 S^3 = 3 S^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_\phi(f) \, df$$

$$I_3 = 4 \sigma_\phi^2 S^4 = 4 S^3 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_\phi(f) \, df$$

$$I_{n-1} = n S^{n-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_\phi(f) \, df$$

* *Chapitre III, page 26.*

ANNEXE N° 2*

TRANSFORMÉE DE FOURIER DE $e^{-\beta|\tau|}\ e^{-\gamma . e^{-\frac{|\tau|}{\alpha}}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|\tau|}\ e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau = \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} \qquad (\omega = 2\pi f)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma . e^{-\frac{|\tau|}{\alpha}}}\ e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\gamma^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n|\tau|}{\alpha}}\ e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\gamma^n \frac{2n/\alpha}{n^2/\alpha^2 + \omega^2}$$

La transformée de Fourier du produit simple est égale au produit de convolution des transformées de Fourier [21] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|\tau|} . e^{-\gamma e^{-\frac{|\tau|}{\alpha}}} . e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\gamma^n \left[\frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} \otimes \frac{2n/\alpha}{n^2/\alpha^2 + \omega^2} \right]$$

L'expression dans le crochet est la transformée de Fourier de

$$e^{-\beta|\tau|}\ e^{-\frac{n}{\alpha}|\tau|} = e^{-[\beta + \frac{n}{\alpha}]|\tau|} = e^{-B_n|\tau|} \qquad (B_n = \beta + \tfrac{n}{\alpha})$$

Soit enfin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|\tau|}\ e^{-\gamma . e^{-\frac{|\tau|}{\alpha}}}\ e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\ \gamma^n\ \frac{2B_n}{B_n^2 + \omega^2}$$

---

* *Chapitre V, page 43.*

ANNEXE N° 3*

CALCUL DIRECT DE Σ_{v_i}

$$\Sigma^2_{v_i} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_o)^2 S_{v_i}(f)\, df}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{v_i}(f)\, df} = \frac{1}{\left(\frac{A_o^2}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 . S_{v_i}(f+f_o)\, df$$

$$S_{v_i}(f+f_o) = \frac{A_o^2}{2} e^{\gamma} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma^n \frac{2C_n}{C_n^2 + f^2} \qquad C_n = \frac{B_n}{2\pi}$$

Effectuons l'intégration de $-a$ à $+a$:

$$\frac{1}{\left(\frac{A_o^2}{2}\right)} \int_{-a}^{+a} f^2 S_{v_i}(f+f_o)\, df = \frac{e^{\gamma}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma^n 2C_n \underbrace{\int_{-a}^{+a} \frac{f^2\, df}{C_n^2 + f^2}}$$

$$2C_n \left[\frac{a}{C_n} - \operatorname{arctg} \frac{a}{C_n} \right]$$

$$= \frac{e^{\gamma}}{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma^n 4C_n a - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma^n 4C_n^2 \operatorname{arctg} \frac{a}{C_n} \right\}$$

En remplaçant C_n par son expression : $C_n = \frac{\pi k T f_o^2}{2PQ^2} + n \frac{f_o}{2Q}$

$$\left(\Sigma^2_{v_i}\right)_a = \frac{e^{\gamma}}{2\pi} \left\{ \frac{2\pi k T f_o^2 a}{PQ^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma^n + \frac{2f_o a}{Q} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \gamma^n}_{-\gamma . e^{-\gamma}} \right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma^n 4C_n^2 \operatorname{arctg} \frac{a}{C_n} \right\}$$

avec $\gamma = \frac{kT\omega_o}{2PQ}$

$$\left(\Sigma^2_{v_i}\right)_a = \frac{kTf_o^2 a}{PQ^2} - \frac{kTf_o^2 a}{PQ^2} - \frac{e^\gamma}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\gamma^n 4C_n^2 \operatorname{arctg}\frac{a}{C_n}$$

avec :
$$C_n^2 = \frac{\pi^2 k^2 T^2 f_o^4}{4P^2Q^4} + 2n\frac{\pi kTf_o^3}{4PQ^3} + n^2\frac{f_o^2}{4Q^2}$$

$$\left(\Sigma^2_{v_i}\right)_a = -\frac{e^\gamma}{2\pi}\left\{\frac{\pi^2 k^2 T^2 f_o^4}{P^2Q^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\gamma^n \operatorname{arctg}\frac{a}{C_n}\right.$$

$$+\frac{2\pi kTf_o^3}{PQ^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\gamma^n \operatorname{arctg}\frac{a}{C_n}$$

$$\left.+\frac{f_o^2}{Q^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!}n\gamma^n \operatorname{arctg}\frac{a}{C_n}\right\}$$

En faisant tendre a vers l'infini :

$$\lim_{a\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{a}{C_n} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{pour } n \text{ donné}$$

$$\Sigma^2_{v_i} = -\frac{e^\gamma}{2\pi}\left\{\frac{\pi^3 k^2 T^2 f_o^4}{2P^2Q^4}e^{-\gamma} + \frac{\pi^2 kTf_o^3}{PQ^3}(-\gamma e^{-\gamma}) + \frac{\pi f_o^2}{2Q^2}(\gamma^2 e^{-\gamma} - \gamma e^{-\gamma})\right\}$$

$$= -\frac{\pi^2 k^2 T^2 f_o^4}{4P^2Q^4} + \frac{\pi^2 k^2 T^2 f_o^4}{2P^2Q^4} - \frac{\pi^2 k^2 T^2 f_o^4}{4P^2Q^4} + \frac{\pi kTf_o^3}{4PQ^3}$$

Soit enfin :

$$\Sigma_{v_i} = \sqrt{\frac{\pi kTf_o^3}{4PQ^3}}$$

---

* *Chapitre 5, page 44.*

ANNEXE N° 4*

CALCUL DE L'INSTABILITÉ DANS LE DOMAINE TEMPS

$$I_i(\tau) = \frac{1}{\omega_o}\left[2\int_0^{+\infty} S_\phi(F) \left(\frac{\sin \pi\tau F}{\pi\tau F}\right)^2 dF \right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{kT}{2PQ^2}} \left[\int_0^{f_o} \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{f_o+F}{f_o} - \frac{f_o}{f_o+F}\right)^2} \left(\frac{\sin \pi\tau F}{\pi\tau F}\right)^2 dF \right.$$

$$+ \int_0^{f_o} \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{f_o-F}{f_o} - \frac{f_o}{f_o-F}\right)^2} \left(\frac{\sin \pi\tau F}{\pi\tau F}\right)^2 dF$$

$$\left. + \int_{f_o}^{+\infty} \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{f_o+F}{f_o} - \frac{f_o}{f_o+F}\right)^2} \left(\frac{\sin \pi\tau F}{\pi\tau F}\right)^2 dF \right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{kT}{2PQ^2}} \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{f_o+F}{f_o} - \frac{f_o}{f_o+F}\right)^2} \left(\frac{\sin \pi\tau F}{\pi\tau F}\right)^2 dF \right.$$

$$\left. + \int_0^{f_o} \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{f_o-F}{f_o} - \frac{f_o}{f_o-F}\right)^2} \left(\frac{\sin \pi\tau F}{\pi\tau F}\right)^2 dF \right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{kT}{2PQ^2}} \left[\int_{f_o}^{+\infty} \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{f}{f_o} - \frac{f_o}{f}\right)^2} \left(\frac{\sin \pi\tau (f-f_o)}{\pi\tau (f-f_o)}\right)^2 df \right.$$

$$\left. + \int_0^{f_o} \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{f}{f_o} - \frac{f_o}{f}\right)^2} \left(\frac{\sin \pi\tau (f-f_o)}{\pi\tau (f-f_o)}\right)^2 df \right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{kT}{2PQ^2}} \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{f}{f_o} - \frac{f_o}{f}\right)^2} \left(\frac{\sin \pi\tau (f-f_o)}{\pi\tau (f-f_o)}\right)^2 df \right]^{1/2}$$

---

* *Chapitre V, page 48.*

ANNEXE N° 5 *

EXPRESSION APPROCHÉE DE $R_{\phi_D}(\tau)$

La fonction de Bessel modifiée de seconde espèce s'écrit :

$$K_\varepsilon(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\varepsilon}(z) - I_\varepsilon(z)}{\sin \pi\varepsilon}$$

Pour $z \ll 1$:

$$K_\varepsilon(z) \simeq \frac{\pi}{2 \sin \pi\varepsilon} \left[\left(\frac{z}{2}\right)^{-\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma(2-\varepsilon)} \right) - \left(\frac{z}{2}\right)^{\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma(2+\varepsilon)} \right) \right]$$

$$z^\varepsilon K_\varepsilon(z) \simeq \frac{\pi}{2 \sin \pi\varepsilon} \left[\frac{2^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} + \frac{z^2}{2^{2-\varepsilon}\,\Gamma(2-\varepsilon)} - \frac{z^{2\varepsilon}}{2^\varepsilon\,\Gamma(1+\varepsilon)} - \frac{z^{2+2\varepsilon}}{2^{2+\varepsilon}\,\Gamma(2+\varepsilon)} \right]$$

$$\simeq \frac{\pi}{2^{1+\varepsilon} \sin \pi\varepsilon} \left[\frac{2^{2\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} + \frac{2^\varepsilon z^2}{2^{2-\varepsilon}\,\Gamma(2-\varepsilon)} - \frac{z^{2\varepsilon}}{\Gamma(1+\varepsilon)} - \frac{z^{2+2\varepsilon}}{2^2\,\Gamma(2+\varepsilon)} \right]$$

Lorsque $\varepsilon \ll 1$:

$$z^\varepsilon K_\varepsilon(z) \simeq \frac{\pi}{2^{1+\varepsilon}\,\pi\varepsilon} \left[\frac{2^{2\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} - \frac{z^{2\varepsilon}}{\Gamma(1+\varepsilon)} \right]$$

$$\simeq \frac{1}{2^{1-\varepsilon}\,\varepsilon\,\Gamma(1-\varepsilon)} \left[1 - \left(\frac{z}{2}\right)^{2\varepsilon} \cdot \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)} \right] \qquad \Gamma(1+\varepsilon) = \varepsilon\,\Gamma(\varepsilon)$$

$$\simeq \frac{\Gamma(\varepsilon)}{2^{1-\varepsilon}} \left[1 - \left(\frac{z}{2}\right)^{2\varepsilon} \cdot (1 + 2\gamma\varepsilon) \right]$$

* *Chapitre VI, page 61.*

La fonction d'autocorrélation a pour expression approchée :

$$R_{\phi_b}(\tau) \simeq \frac{2^{1-\varepsilon}\sqrt{\pi}\,A}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{2^{1-\varepsilon}} \left[1 - \left(\frac{q|\tau|}{2} \right)^{2\varepsilon} \cdot (1+2\gamma\varepsilon) \right]$$

$$= \frac{A\sqrt{\pi}\,\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+\frac{1}{2})} \cdot \left[1 - \left(\frac{q|\tau|}{2} \right)^{2\varepsilon} (1+2\gamma\varepsilon) \right]$$

ANNEXE N° 6*

CALCUL DE $\int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_o)^2 P_i \, e^{-\overline{\phi^2}} \left\{ \delta(f-f_o) + S_\phi(f-f_o) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[S_\phi(f)^{n-1} \otimes S_\phi(f) \right]_{f_o} \right\} df$

En utilisant le résultat du calcul de l'Annexe n° 1, cette intégrale s'écrit :

$$P_i \, e^{-\overline{\phi^2}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_\phi(f) df + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \left[S_\phi(f)^{n-1} \otimes S_\phi(f) \right] df \right\}$$

$$= P_i \, e^{-\overline{\phi^2}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_\phi(f) df + \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_\phi(f) df \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\overline{\phi^2})^{n-1}}{(n-1)!} \right\}$$

$$= P_i \, e^{-\overline{\phi^2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_\phi(f) df \cdot \left\{ 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\overline{\phi^2})^p}{p!} \right\}$$

$$= \frac{P_i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f) df$$

---

* *Chapitre XI, page 106.*

RÉFÉRENCES

[1] IEEE-NASA Symposium on short-term frequency stability. Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland (Nov. 1964).

[2] Proc. of IEEE. Special issue on frequency stability, vol. 54, n° 2, (February 1966), p. 101-338.

[3] GUILLIEN R. – *Electronique (II).* Presses Universitaires de France (1966).

[4] GERBER E.A. and SYKES R.A. – *State of the Art - Quartz crystal units and oscillators.* Proc. of IEEE. Special issue on frequency stability, vol. 54, n° 2, (February 1966), p. 103-116.

[5] Mc COUBREY A.O. – *A survey of atomic frequency standards.* Proc. of IEEE. Special issue on frequency stability, vol. 54, n° 2, (February 1966), p. 116 135.

[6] KASTLER A. – *Quelques suggestions concernant la production optique et la détection optique d'une inégalité de population des niveaux de quantification spatiale des atomes. Application à l'expérience de Stern et Gerlach et à la résonance magnétique.* J. Phys. Rad., tome 11, n° 6 (1950), p. 255-265.

[7] GORDON J.P., ZEIGER H.J. and TOWNES C.H. – *Maser - New type of microwave amplifier, frequency standard and spectrometer.* The Physical Review, vol. 99, n° 4 (August 1955), p. 1264-1274.

[8] UEBERSFELD J. et OLIVIER M. – *Les étalons atomiques et moléculaires de fréquence.* L'Onde Electrique, (avril 1966), p. 403-406.

[9] HARDIN J. – *Maser à ammoniac.* Thèse 3^{e} cycle, Besançon (1962).

[10] KLEPPNER D., GOLDENBERG H.M. and RAMSEY N.F. – *Theory of the hydrogen maser.* The Physical Review, vol. 126, n° 2 (April 1962), p. 603-615.

[11] HELLWIG H. *Areas of promise for the development of future primary frequency standards.* Metrologia, vol. 6, n° 4 (October 1970), p. 118-126.

[12] GIACOMO P. – *Laser et métrologie.* Bulletin d'information du B.N.M. (juillet 1970), fascicule 1.

[13] HARTMANN F. – *Les standards de fréquence optiques.* Annales de Physique, t. 5 (1970), p. 281-290.

[14] BOYNE H.S. – *Laser frequency stabilization techniques and applications.* IEEE Tr. on Instrumentation and Measurement, vol. IM 20, n° 1 (February 1971), p. 19-22.

[15] PICINBONO B. et De SUZO BARBA J. – *Etude de certains modèles statistiques intervenant dans l'interprétation des grandeurs physiques quasi-sinusoïdales.* Ann. Télécom., tome 17, n° 9-10 (sept-oct. 1962), p. 236-241.

[16] CUTLER L.S. and SEARLE C.L. – *Some aspects of the theory and measurement of frequency fluctuations in frequency standards.* Proc. of IEEE. Special issue on frequency stability, vol. 54, n° 2, (February 1966), p. 136-154).

[17] PICINBONO B. – *Processus de diffusion et stationnarité. Application à la représentation du bruit des oscillateurs.* C.R. Ac. Sc., Paris, t. 271.B, n° 14, p. 661.

[18] PYEE M. – *Etude des diodes métal-isolant-métal.* Thèse de Doctorat 3^{e} cycle, Paris (1972).

[19] BAGHDADY E.J., LINCOLN R.N. and NELIN B.D. *Short term frequency stability : characterization, theory and measurement.* IEEE-NASA Symposium on short-term frequency stability. Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland (Nov. 1964), p. 65-88.

[20] PAPOULIS A. *Probability, random variables and stochastic processes.* Mc Graw Hill Book Company (1965).

[21] PAPOULIS A. – *The Fourier integral and its applications.* Mc Graw Hill Book Company (1962).

[22] ERDELYI A. – *Tables of integral transforms.* Mc Graw Hill Book Company (1954).

[23] GRIVET P. and BLAQUIERE A. – *Nonlinear effects of noise in electronic clocks.* Proc. of IEEE, vol. 51, nº 11 (November 1963), p. 1606-1614.

[24] BLAQUIERE A. – *Effet du bruit de fond sur la fréquence des auto-oscillateurs à lampes. Précision ultime des horloges radioélectriques.* Annales de radioélectricité, tome VIII, nº 31 (janvier 1953), p. 36-80.

[25] BLAQUIERE A. – *Spectre de puissance d'un oscillateur non-linéaire perturbé par le bruit.* Annales de radioélectricité, tome VIII, nº 32 (avril 1953), p. 153-179.

[26] EDSON W.A. – *Noise in oscillators.* Proc. of the I.R.E., vol. 48, nº 8 (august 1960), p. 1454-1466.

[27] HAFNER E. – *The effects of noise on crystal oscillators.* IEEE-NASA Symposium on short-term frequency stability. Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland (Nov. 1964), p. 125-147.

[28] BAUGH R.A. and CUTLER L.S. – *Precision frequency sources.* Microwave Journal, vol. 13, nº 6 (June 1970), p. 43-56.

[29] LACEY R.F., HELGESSON A.L. and HOLLOWAY J.H. *Short term stability of passive atomic frequency standard.* Proc. of IEEE. Special issue on frequency stability, vol. 54, nº 2 (February 1966), p. 170-176.

[30] RUTMAN J. – *Very-short-term frequency instability (time domain) of an oscillator disturbed by additive internal thermal noise.* Proceedings of the IEEE, vol. 58, nº 6 (June 1970).

[31] MIDDLETON D. – *Introduction to statistical communication theory.* Mc Graw Hill Book Company (1960).

[32] CHATANIER M. – *Caractérisation théorique et expérimentale de la stabilité de fréquence des oscillateurs.* La Rech. Aérosp., nºs 131 (juillet-août 1969), p. 49-56.

[33] RUTMAN J. – *A relation between frequency instability and RF spectrum and its application to a thermal noise perturbated oscillator.* Proc. of the IEEE, vol. 59, nº 1 (January 1971).

[34] *Selected papers on noise and stochastic processes*, edited by Wax, Dover Publ., New York (1954).

[35] ALLAN D.W. – *Statistics of atomic frequency standards.* Proc. of IEEE. Special issue on frequency stability, vol. 54, nº 2 (February 1966), p. 221-230.

[36] BIQUARD F. – *Etude d'un oscillateur de type monotron à cavité supraconductrice présentant une très haute stabilité de fréquence.* Revue de Physique Appliquée, tome 5 (Août 1970), p. 705-725.

[37] LEVINE M.W. and VESSOT R.F.C. – *Hydrogen maser time and frequency standard at Agassiz Observatory.* Radio Science, vol. 5, nº 10, (October 1970), p. 1287-1292.

[38] ATTKINSON W.K., FEY L. and NEWMAN J. – *Spectrum analysis of extremely low-frequency variations of quartz oscillators.* Proc. IEEE, vol. 51 (February 1963), p. 379.

[39] BARNES J.A. and ALLAN D.W. – *Effects of long term stability on the definition and measurement of short term stability.* 1964 IEEE-NASA Symposium on short term frequency stability, Greenbelt, Maryland), p. 119-123.

[40] GRAY R.M. and TAUSWORTHE R.C. – *Frequency-counted measurements and phase-locking to noisy oscillators.* IEEE Tr. Com. Techn., vol. COM-19, nº 1 (February 1971), p. 21-30.

[41] RUTMAN J. and UEBERSFELD J. – *A model for flicker frequency noise of oscillators.* Proc. of the IEEE, vol. 60, nº 2 (February 1972).

[42] BARNES J. – *Atomic timekeeping and statistics of precision signal generators.* Proc. of the IEEE, vol. 54 (February 1966), p. 207-220.

[43] STERN J., De BARBEYRAC J. et POGGI R. – *Méthodes pratiques d'étude des fonctions aléatoires.* Editions Dunod (1967).

[44] MANDELBROT B. – *Some noises with 1/f spectrum, a bridge between direct current and white noise.* IEEE Tr. Information Theory, vol. IT 13 (February 1967), p. 289-298.

[45] BARNES J.A. et al. – *Characterization of frequency stability.* IEEE Tr. Instr. Meas., vol. IM-20, nº 2 (May 1971), p. 105-120.

[46] BARNES J.A. – *Tables of Bias functions, B_1 and B_2, for variances based on finite samples of processes with power law spectral densities.* NBS Technical Note, nº 375 (January 1969).

[47] RUTMAN J. – *Comment on : characterization of frequency stability.* IEEE Tr. Instr. Meas., vol. IM-21 n° 2 (February 1972).

[48] ASHLEY J.R., SEARLES C.B. and PALKA F.M. – *The measurement of oscillator noise at microwave frequencies.* IEEE Tr. Microwave theory and techniques, vol. MTT-16, n° 9 (september 1968), p. 753-760.

[49] SLICHTER C.P. – *Principles of magnetic resonance.* Harper and Row, John Weatherhill (1964).

[50] HILL H.D.W. and RICHARDS R.E. *Limits of measurement in magnetic resonance.* Journal of Scientific Instruments, Series 2, Vol. 1 (1968), p. 977-983.

[51] ROBINSON F.N.H. *Noise in electrical circuits.* Oxford University Press (1962).

[52] CHATANIER M. – *Communication personnelle.*

[53] DECAILLIOT M. *Spectromètre pour dispersion paramagnétique électronique ; application à la double résonance ENDOR dans le charbon.* Thèse de doctorat d'Etat, Besançon (1969).

[54] BOURQUIN R. et DECAILLIOT M. – *Méthode conduisant dans un spectromètre à l'élimination du bruit de fréquence de la source dans l'observation de la dispersion.* C.R. Ac. Sc. Paris, t. 273.B (1971), p. 76-79.

[55] BUCKMASTER H.A. and DERING J.C. – *Limiting sensitivity of E.P.R. spectrometers at high power levels.* Colloque Ampère XIV, North-Holland Publ. co. (1967).

[56] LAWSON J.L. and UHLENBECK G.E. – *Threshold signals.* Mc Graw Hill Book Company (1950).

[57] WATSON G.N. – *Theory of Bessel functions.* University Press, Cambridge (1948).

[58] BOURQUIN R. – *Etude et réalisation d'un discriminateur hyperfréquence. Application à la mesure du spectre de fréquence des oscillateurs et à la mesure de la dispersion paramagnétique.* Thèse de 3^{e} cycle, Besançon (1971).

Achevé d'imprimer à l'O.N.E.R.A., Février 1972 - Dépôt légal 1er trimestre 1972 - n° 411.